

Courbes et surfaces

Boris Thibert

Les courbes et les surfaces interviennent naturellement dans divers domaines. À titre d'exemple, la modélisation de voitures dans un logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) comme CATIA se fait avec des surfaces. De même, la trajectoire d'un objet, le tracé d'une route et bien d'autres exemples encore se modélisent par des courbes. Dans ce cours, nous allons présenter quelques notions de base qui concernent les courbes et les surfaces qui sont dites *paramétrées*. Une courbe paramétrée est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$) et une surface paramétrée est une application $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ainsi, pour étudier les courbes et surfaces paramétrées, nous utiliserons des fonctions d'une et de deux variables. Aussi, une connaissance sur les fonctions d'une et de deux variables réelles, sur les développements limités sera utile, même si nous rappellerons certaines des notions utilisées.

Table des matières

1	Cours	2
1.1	Courbes paramétrées : généralités et étude métrique	2
1.2	Allure locale des courbes planes	9
1.3	Allure locale des courbes gauches	14
1.4	Surfaces paramétrées	18
2	Entraînement	26
2.1	Vrai ou faux	26
2.2	Exercices	28
2.3	QCM	36
2.4	Devoir	39
2.5	Corrigé du devoir	40
3	Compléments	45
3.1	Courbes de Bézier	45
3.2	Theorema Egregium de Gauss	47
3.3	Surfaces développables	48

1 Cours

Dans ce cours, on se place dans un espace affine qui est de dimension soit deux, soit trois. Un point M dans un espace de dimension $d \in \{2, 3\}$ sera repéré par ses coordonnées $(u_1, \dots, u_d)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$. Cet espace est naturellement identifié à $\mathbb{R}^d$. Le produit scalaire de deux vecteurs $u = (u_1, \dots, u_d)$ et $v = (v_1, \dots, v_d)$ est donné par :

$$u.v = \sum_{i=1}^d u_i v_i.$$

1.1 Courbes paramétrées : généralités et étude métrique

Intuitivement, une courbe dans l'espace de dimension d est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. On dit d'un tel objet qu'il est 1-dimensionnel. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$. Quand le paramètre t parcourt l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt la courbe. Une telle application γ est une courbe paramétrée. On se concentre ici sur l'étude des courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Définition des courbes paramétrées

Définition 1. Soit $d \in \{2, 3\}$. On appelle courbe paramétrée de classe C^k de $\mathbb{R}^d$ une application de classe C^k

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{C} = \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$ est appelé le *support géométrique* de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$. On dit que $\mathcal{C}$ est une *courbe géométrique* et que γ est une *paramétrisation* de $\mathcal{C}$. On peut remarquer que la courbe paramétrée comporte plus d'informations que la courbe géométrique : quand t parcourt l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt $\mathcal{C}$. Autrement dit, la courbe paramétrée donne non seulement le support géométrique, mais aussi une façon de le parcourir. Dans la suite, quand on considèrera la restriction d'une courbe γ à un intervalle fermé $[a, b] \subset I$, on écrira $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Si $d = 2$, on dit que la courbe est plane.

Exemple : Le support géométrique de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), t)$ est une hélice (Figure 2).

Prenons une route allant de Grenoble à Chamrousse et modélisons la par une courbe géométrique $\mathcal{C}$! Prenons maintenant une voiture qui part de Grenoble à un instant $t = 0$ et arrive à Chamrousse à un instant $t = 45$ minutes. Le trajet de cette voiture est naturellement modélisé par la courbe paramétrée $\gamma : [0, 45] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ qui à

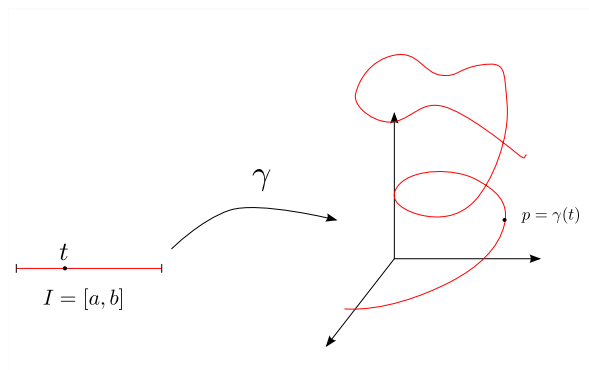


FIGURE 1 – Courbe paramétrée

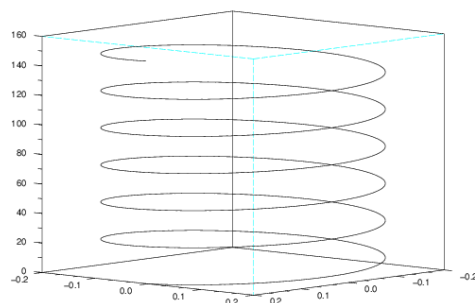


FIGURE 2 – Hélice

chaque instant t , donne la position $\gamma(t)$ de la voiture. Prenons maintenant un vélo qui va parcourir ce même trajet mais en mettant bien entendu un peu plus de temps, par exemple 180 minutes. Cela nous définit une autre paramétrisation $\tilde{\gamma} : [0, 180] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ qui est différente de γ , mais qui a exactement le même support géométrique $\mathcal{C}$.

De même, pour prendre un exemple "plus mathématique", considérons la courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (Rt, R\sqrt{1-t^2})$. De l'équation $x^2(t) + y^2(t) = R^2$, on déduit que $\gamma(t)$ appartient au cercle de rayon R et de centre $(0, 0)$. Plus précisément, le support géométrique de γ est le quart de cercle entre les points $(R, 0)$ et $(0, R)$. Or ce support géométrique admet aussi une autre paramétrisation $\tilde{\gamma} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\tilde{\gamma}(\theta) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta))$. **Ainsi, une même courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations.**

Reparamétrisation

Il est possible de reparamétriser une courbe. Pour cela, on rappelle la notion de difféomorphisme.

Définition 2. Soient U et V deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^d$. Une application $f : U \rightarrow V$ est un C^1 difféomorphisme si :

- f est une bijection de U dans V .
- f et f^{-1} sont toutes les deux de classe C^1 .

Prenons maintenant une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 et un difféomorphisme $\varphi : J \rightarrow I$ (avec J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). Alors $\gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une courbe paramétrée qui a exactement le même support géométrique que γ . On dit alors que φ est un *changement de variable admissible* et que $\gamma \circ \varphi$ est une *reparamétrisation* de γ .

Courbes régulières, espace tangent

Intuitivement, la tangente en un point $\gamma(t_0)$ à une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la limite des droites passant par $\gamma(t)$ et $\gamma(t_0)$ quand t tend vers t_0 . Cela peut se formaliser de la manière suivante :

Définition 3. On dit que $\vec{v}_0$ est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0)$ si

$$\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda(t)\vec{v}_0 + \lambda(t)\epsilon(t), \text{ avec } \lambda(t) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = (0, 0).$$

La droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}_0$ est alors appelée la droite tangente à γ en $\gamma(t_0)$.

La proposition suivante indique qu'une dérivée non nulle de la paramétrisation donne un vecteur tangent.

Proposition 1. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, alors $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe γ en $\gamma(t_0)$.

Démonstration : Comme γ est de classe C^1 , on a :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\epsilon(t), \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = (0, 0),$$

ce qui permet de conclure. □

Définition 4. Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 est dite régulière si pour tout $t \in I$ $\gamma'(t) \neq 0$.

Remarques :

- Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est régulière et si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est une reparamétrisation de γ , alors $\tilde{\gamma}$ est aussi régulière. En effet, comme $\varphi : J \rightarrow I$ est un C^1 -difféomorphisme, on a

$$\forall t \in J, \tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) \neq 0.$$

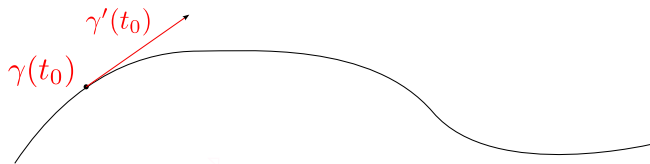


FIGURE 3 – Tangente à une courbe paramétrée

- Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point. La réciproque n'est pas vraie. Considérons la courbe paramétrée suivante :

$$\gamma(t) = (t^2, t^4) \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

La courbe géométrique associée est la parabole d'équation $y = x^2$ qui a un vecteur tangent horizontal au point $\gamma(0)$. Pourtant $\gamma'(0)$ est nul !

Longueur d'une courbe

Comment mesurer la longueur d'une courbe ? Une façon naturelle de procéder consiste à approcher cette longueur par la longueur d'une ligne polygonale dont les sommets sont sur la courbe. La longueur de la ligne polygonale est clairement inférieure à celle de la courbe, mais on imagine bien que si on rajoute des sommets en diminuant la distance entre deux sommets consécutifs, la longueur de la ligne polygonale va tendre vers la longueur de la courbe. La définition de la longueur d'une courbe repose sur cette idée (Figure 4) :

Définition 5. La longueur d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est donnée par :

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_k) \gamma(t_{k+1})} \right\|,$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, n étant quelconque.

De plus, si $l(\gamma)$ est fini, on dit que la courbe γ est rectifiable.

Remarque : La longueur ne dépend pas de la paramétrisation.

La définition précédente est géométrique et correspond à l'intuition que l'on peut avoir de la longueur. Ceci dit, elle n'est pas forcément pratique pour effectuer des calculs. Le théorème suivant exprime la longueur d'une courbe paramétrée par une formule intégrale.

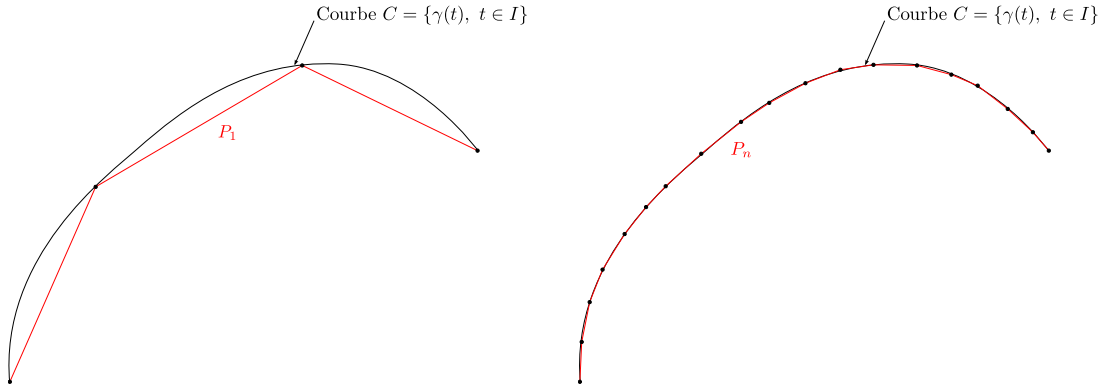


FIGURE 4 – Longueur d’une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si on augmente la densité des sommets de la ligne polygonale P_n le long de la courbe, alors la longueur de P_n approche celle de la courbe.

Théorème 1. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Alors γ est rectifiable et on a :

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Démonstration : Considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de l’intervalle $[a, b]$. Nous avons pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Cela implique en sommant sur i :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_k) \gamma(t_{k+1})} \right\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

En passant maintenant au supremum sur toutes les subdivisions, on obtient que γ est rectifiable et vérifie :

$$l(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Montrons maintenant l’égalité souhaitée. Pour cela, introduisons la fonction $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui donne la longueur de la courbe entre les paramètres a et t :

$$\forall t \in [a, b], \phi(t) = l(\gamma|_{[a, t]}).$$

Prenons $t \in [a, b]$ et h vérifiant $t + h \in [a, b]$. La longueur de la courbe entre les paramètres t et $t + h$ étant plus longue que la longueur du segment reliant $\gamma(t)$ à $\gamma(t + h)$, on a :

$$\frac{1}{|h|} \left\| \overrightarrow{\gamma(t) \gamma(t+h)} \right\| \leq \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}.$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{|h|} \left\| \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+h)} \right\| \leq \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(u)\| du.$$

Les membres de droite et de gauche ont la même limite $\|\gamma'(t)\|$, ce qui implique que ϕ est dérivable en t et que l'on a $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$. $\square$

Exemple : La longueur de l'hélice paramétrée par $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), at)$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + a^2}.$$

Remarquons au passage que si $a = 0$, on retrouve que la longueur d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$.

Paramétrisation par abscisse curviligne

Maintenant que l'on sait calculer la longueur d'une courbe, il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation, on peut reprendre l'exemple de la courbe $\mathcal{C}$ qui modélise la route Grenoble-Chamrousse. On a déjà donné deux paramétrisations possibles de cette courbe, mais il est aussi possible d'en définir une troisième en repérant chaque point de $\mathcal{C}$ par sa distance au point d'origine, à savoir Grenoble. La longueur du trajet étant de 30 kilomètres, cela nous définit naturellement la courbe paramétrée $\gamma : [0, 30] \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à chaque longueur $s \in [0, 30]$ associe le point $\gamma(s)$ sur la courbe $\mathcal{C}$ qui est à une distance s du point de départ. Cette paramétrisation est dite *normale* ou *par abscisse curviligne*. Elle est assez naturelle dans le sens où elle ne dépend pas de la vitesse d'un véhicule qui parcourt cette courbe (plus exactement, cette vitesse est constante). Formellement, on définit :

Définition 6. Une paramétrisation $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ d'une courbe géométrique est dite *normale* (ou *par abscisse curviligne*) si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$ la longueur de la courbe géométrique entre les points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ est exactement $t_2 - t_1$:

$$l(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1.$$

En pratique, on n'a pas forcément une paramétrisation normale. Si on veut en avoir une, il faut reparamétriser. Pour cela, on a besoin de la notion d'abscisse curviligne.

Définition 7. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre t_0 est la fonction $s_{t_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall t \in I \quad s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Géométriquement, $s_{t_0}(t)$ est la longueur de la courbe géométrique $\mathcal{C} = \gamma(I)$ entre les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. Le résultat suivant nous indique que toute courbe paramétrée régulière de classe C^1 peut être reparamétrisée par abscisse curviligne.

Théorème 2. Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 et $t_0 \in I$. Alors l'abscisse curviligne $s_{t_0}^{-1} : J \rightarrow I$ est un changement de variable admissible et

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_{t_0}^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^d$$

est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que γ .

Démonstration : Admise. □

Corollaire 1. Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 . On note $l = l(\gamma)$ la longueur de γ . Alors la courbe

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_a^{-1} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

est une reparamétrisation normale de γ .

Intuitivement, si on "déroule" une courbe géométrique $\mathcal{C}$ de longueur l le long d'une droite, on obtient un segment qui est aussi de longueur l et qui peut être identifié à l'intervalle $I = [0, l]$. La correspondance point par point entre I et $\mathcal{C}$ donne naturellement une paramétrisation normale $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow \mathcal{C}$. Par convention, on note souvent s le paramètre d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne et on note souvent t le paramètre dans le cas d'une paramétrisation quelconque.

Proposition 2. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Alors on a :

$$\text{la paramétrisation } \gamma \text{ est normale} \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in I \quad \|\gamma'(s)\| = 1.$$

Démonstration : Si la paramétrisation est normale, alors l'abscisse curviligne à partir du point t_0 de γ vérifie pour tout $t \in I$:

$$s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = t - t_0.$$

En dérivant, cela donne pour tout $t \in I$: $s'_{t_0}(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$.

Réciproquement, si pour tout $s \in I$ on a $\|\gamma'(s)\| = 1$, alors pour tout $[t_1, t_2] \subset I$:

$$l(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(s)\| ds = t_2 - t_1.$$

□

Exemple : On considère la courbe paramétrée $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. L'abscisse curviligne $s_0 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$s_0(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin(t).$$

La fonction $\arcsin : [0, 1[\rightarrow]0, \pi/2[$ est une bijection. La reparamétrisation $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_0^{-1} :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sin s) = \left(\sin s, \sqrt{1 - \sin^2(s)} \right) = (\sin(s), \cos(s)).$$

On remarque que cela correspond à une paramétrisation du quart de cercle de rayon 1 entre les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Le paramètre s correspond à l'angle entre $\overrightarrow{0\gamma(s)}$ et le vecteur de coordonnées $(0, 1)$.

1.2 Allure locale des courbes planes

Dans cette partie, on s'intéresse à l'allure locale des courbes planes régulières. Une notion centrale pour connaître cette allure est la courbure. On verra que celle-ci est fortement liée à la dérivée seconde de la paramétrisation. Rappelons que le déterminant $\det(u, v)$ de deux vecteurs $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est donné par :

$$\det(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Repère de Serret-Frenet

On définit tout d'abord le repère de Serret-Frenet. Il s'agit d'un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée.

Définition 8. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 . Le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(t)$ est le repère orthonormé :

$$(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t)),$$

où $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ et $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est une base orthonormée directe du plan affine.

Le vecteur $\vec{T}(t)$ est tangent à la courbe au point $\gamma(t)$ et le vecteur $\vec{N}(t)$ est un vecteur qui est *normal* à la courbe en $\gamma(t)$.

Remarque : La droite tangente à la courbe γ au point $\gamma(t)$ ne dépend pas de la paramétrisation. Par contre, le vecteur $\vec{T}(t)$ en dépend : si on change le sens de parcours de la courbe, alors ce vecteur sera remplacé par son opposé. Le repère de Serret-Frenet dépend ainsi du sens de parcours de la paramétrisation ainsi que de l'orientation du plan affine.

Courbure

Quelle est l'allure locale d'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière de classe C^2 ? On peut supposer, sans restriction, que cette courbe est paramétrée par abscisse curviligne. Pour connaître la forme, on va effectuer un développement limité de γ à l'ordre 2 en s_0 :

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\gamma'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\gamma''(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

On sait que le vecteur $\vec{T}(s) = \gamma'(s)$ est tangent à la courbe en $\gamma(s_0)$. Si $\gamma''(s_0) \neq 0$, le développement limité nous indique qu'à l'ordre deux, la courbe est "attirée" dans la direction $\gamma''(s_0)$. Autrement dit, le vecteur $\gamma''(s_0)$ nous donne des informations sur la forme de la courbe au voisinage de $\gamma(s_0)$. Intuitivement, on voit aussi que plus $\|\gamma''(s_0)\|$ est grand, plus la courbe est courbée. Effectivement, cette norme va nous permettre de définir la courbure (Figure 5).

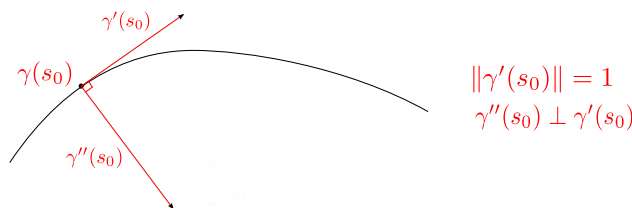


FIGURE 5 – Dérivée première et seconde d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne

Proposition 3. Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière de classe C^2 , alors $\gamma''(s)$ est un vecteur colinéaire à $\vec{N}(s)$. En particulier, il existe une application continue $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall s \in I, \quad \gamma''(s) = \vec{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\vec{N}(s).$$

Démonstration : Pour tout $s \in I$, on a $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = \|\vec{T}(s)\|^2 = 1$. En dérivant, cela donne $\vec{T}'(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$. On pose alors $\bar{\kappa}(s) = \gamma''(s) \cdot \vec{N}(s)$. $\square$

On est maintenant en mesure de définir la courbure d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne.

Définition 9. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 et $p = \gamma(s)$ un point de la courbe.

— La courbure algébrique $\bar{\kappa}(s)$ de γ en p est :

$$\bar{\kappa}(s) = \gamma''(s) \cdot \vec{N}(s) = \vec{T}'(s) \cdot \vec{N}(s).$$

— La courbure $\kappa(s)$ de γ en p est :

$$\kappa(s) = |\bar{\kappa}(s)| = \|\gamma''(s)\|.$$

— Le point $p = \gamma(s)$ de γ est birégulier si $\kappa(s) \neq 0$.

— On dit que p est un point d'inflexion de γ si la droite tangente à γ en p "traverse" la courbe en p dans tout voisinage de p .

Exemple : Prenons la paramétrisation $\gamma(\theta) = (R \cos \frac{\theta}{R}, R \sin \frac{\theta}{R})$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. On remarque que cette paramétrisation est normale car pour tout θ on a $\|\gamma'(\theta)\| = 1$. La courbure au point $\gamma(\theta)$ vaut :

$$\kappa(\theta) = \|\gamma''(\theta)\| = \left\| \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{\theta}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{\theta}{R} \right) \right\| = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle de rayon R est donc constante et vaut R .

Proposition 4. La courbure ne dépend pas de la paramétrisation et la courbure algébrique est défini au signe près (et dépend du sens de parcours de la courbe et de l'orientation du plan).

Plus précisément, prenons $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale et $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une reparamétrisation de γ . Alors il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\forall p = \gamma_1(s) = \gamma_2(u) \in \mathcal{C} \quad \kappa_1(s) = \kappa_2(u) \quad \text{et} \quad \bar{\kappa}_1(s) = \epsilon \bar{\kappa}_2(u)$$

où κ_i et $\bar{\kappa}_i$ sont les courbures et courbures algébriques de γ_i (avec $i \in \{1, 2\}$).

Démonstration : Admise. □

Interprétation géométrique

Si une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est normale, le point $\gamma(s)$ avance à la même vitesse que son paramètre s (cela correspond au fait que la norme de la dérivée est constante égale à 1). Avec cette paramétrisation, on a vu que le vecteur $\gamma''(s) = \bar{\kappa}(s) \vec{N}(s)$ est orthogonal à $\vec{T}(s)$ et le développement limité de γ à l'ordre deux peut se réécrire naturellement dans le repère de Serret-Frenet :

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0) \vec{T}(s_0) + \bar{\kappa}(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} \vec{N}(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

En un point de paramètre s , si la courbure $\bar{\kappa}(s)$ est strictement positive, les vecteurs $\vec{N}(s)$ et $\gamma''(s)$ sont égaux et le vecteur $\vec{N}(s)$ pointe vers le centre de courbure. Si la courbure est négative, alors $\vec{N}(s) = 1/\bar{\kappa}(s) \gamma''(s)$ pointe dans la direction opposée au centre de courbure (Figure 6).

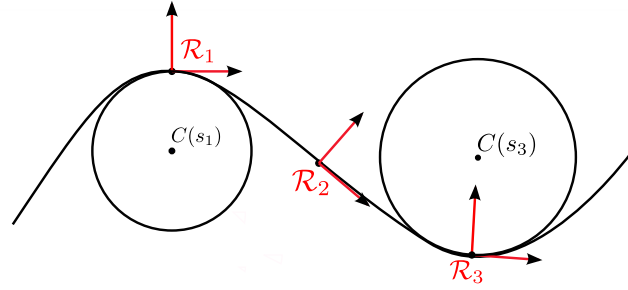


FIGURE 6 – Repère de Serret-Frenet $\mathcal{R}_i = (\gamma(s_i), \vec{T}(s_i), \vec{N}(s_i))$ au point de paramètre s_i (avec $i \in \{1, 2, 3\}$) : en $\gamma(s_1)$, la courbure algébrique est négative et le vecteur $\vec{N}(s_1)$ pointe dans la direction opposée au centre de courbure $C(s_1)$. En $\gamma(s_2)$, la courbure algébrique est nulle, il n'y a pas de centre de courbure. En $\gamma(s_3)$ la courbure algébrique est positive et le vecteur $\vec{N}(s_3)$ pointe vers le centre de courbure $C(s_3)$.

Proposition 5. Si γ a un point d'inflexion en s_0 , alors $\kappa(s_0) = 0$.

Démonstration : Il suffit de reprendre le développement limité. □

En général, si on prend une courbe paramétrée quelconque, il n'y a pas de raison pour que la paramétrisation soit normale. On peut alors utiliser la proposition suivante pour calculer la courbure :

Proposition 6. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2 . Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{et} \quad \kappa(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Démonstration : On note $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_{t_0}^{-1}$ la paramétrisation par abscisse curviligne (avec $t_0 \in I$) et on pose $s = s_{t_0}(t)$. La formule :

$$(s_{t_0}^{-1})'(s) = \frac{1}{s'_{t_0}(s_{t_0}^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}$$

implique

$$\tilde{\gamma}'(s) = (\gamma \circ s_{t_0}^{-1})'(s) = \gamma'(s_{t_0}^{-1}(s)) (s_{t_0}^{-1})'(s) = \frac{\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}.$$

En dérivant une deuxième fois, on a :

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{\gamma''(s_{t_0}^{-1}(s))}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|^2} + \lambda(s)\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s)),$$

où λ est la dérivée de la fonction $s \mapsto \frac{1}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}$. On a donc :

$$\det(\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s)) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\det(\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s)) = \det(\vec{T}(s), \kappa(s)\vec{N}(s)) = \bar{\kappa}(s),$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Le cercle de rayon $\frac{1}{\kappa(t)}$ et tangent à la courbe γ au point $\gamma(t)$ s'appelle le *cercle osculateur* au point $\gamma(t)$.

Définition 10. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et de classe C^2 .

— Le centre de courbure en $\gamma(t)$ en un point de courbure non nulle est le point :

$$C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{N}(t).$$

— Le cercle osculateur est le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $\frac{1}{\kappa(t)}$.

Sur la Figure 6, on observe que les cercles osculateurs aux points $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_3)$ "épousent" bien la forme de la courbe. En fait, ils ont un contact d'ordre deux avec la courbe : plus précisément on peut montrer que la courbe paramétrée par abscisse curviligne et le cercle osculateur paramétré par abscisse curviligne ont un développement limité qui coïncide à l'ordre deux au voisinage du point $\gamma(s_i)$ (avec $i \in \{1, 3\}$).

Formules de Serret-Frenet

Le repère de Serret Frenet est défini en chaque point d'une courbe paramétrée régulière. Les formules de Serret-Frenet expriment la façon dont ce repère bouge le long de la courbe. Plus précisément, elles donnent les dérivées de ce repère dans la base de Serret-Frenet.

Proposition 7 (Formules de Serret Frenet). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 . Alors pour tout $s \in I$, on a :

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) = -\bar{\kappa}(s)\vec{T}(s) \end{cases}$$

Démonstration : La première formule a déjà été montrée. Le vecteur $\vec{N}(s)$ étant unitaire, on a :

$$\forall s \in I \quad \vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) = 1.$$

En dérivant, on obtient

$$\forall s \in I \quad \vec{N}'(s) \cdot \vec{N}(s) = 0.$$

Le vecteur $\vec{N}'(s)$ est donc colinéaire à $\vec{T}(s)$. Par ailleurs, on a :

$$\forall s \in I \quad \vec{T}(s) \cdot \vec{N}(s) = 0.$$

En dérivant, on obtient

$$\vec{T}'(s) \cdot \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \cdot \vec{N}'(s) = 0,$$

et donc $\kappa(s) = -\vec{N}'(s) \cdot \vec{T}(s)$, ce qui permet de conclure. $\square$

1.3 Allure locale des courbes gauches

Une courbe gauche est une courbe de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas plane. Dans cette partie, on considère les courbes paramétrées régulières gauches de classe C^2 de la forme :

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

L'étude de l'allure locale est plus compliquée que pour les courbes planes. En effet, pour une courbe plane paramétrée régulière, il n'y a qu'une seule direction normale en chaque point de la courbe. Pour une courbe gauche, il y a tout un plan qui est orthogonal au vecteur tangent à la courbe en chaque point, ce qui complique un peu son étude et introduit une nouvelle notion, celle de *torsion*.

Courbure et normale principale

Dans le cas des courbes planes, le signe de la courbure algébrique est lié au sens de parcours de la courbe et à l'orientation du plan. Pour une courbe gauche, il n'est plus possible d'avoir un signe de courbure cohérent : intuitivement, quand on se promène sur la courbe, on ne peut pas de manière naturelle dire où est la droite, et où est la gauche. On ne définit donc pas de courbure algébrique, mais uniquement une courbure (qui est toujours positive).

Définition 11. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 . La courbure de γ au point $\gamma(s)$ est :

$$\kappa(s) = \|\gamma'(s)\|.$$

Proposition 8. La courbure d'une courbe paramétrée régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 au point de paramètre t vaut :

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Démonstration : La preuve est similaire à celle pour les courbes planes. $\square$

Définition 12. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée normale de classe C^2 .

- Un point $\gamma(s)$ est dit *birégulier* si $\kappa(s) \neq 0$ (i.e. $\gamma''(s) \neq 0$).
- La normale principale de γ en un point birégulier $\gamma(s)$ est donnée par

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

De même que pour les courbes planes, la dérivée seconde $\gamma''(s)$ est orthogonale à $\gamma'(s)$ et indique la direction dans laquelle la courbe est courbée à l'ordre deux. Nous introduisons maintenant plusieurs définitions

Définition 13. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par abscisse curviligne de classe C^2 et $\gamma(s)$ un point birégulier.

- Le plan osculateur en $\gamma(s)$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{T}(s)$ et $\vec{N}(s)$
- Le rayon de courbure en $\gamma(s)$ est $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$.
- Le centre de courbure en $\gamma(s)$ est $C(s) = \gamma(s) + R(s)\vec{N}(s)$.
- La développée de γ est l'ensemble des centres de courbure.
- La sphère osculatrice est la sphère de centre $C(s)$ et de rayon $R(s)$.

Remarque : Comme pour les courbes planes, on peut montrer que ces définitions ne dépendent pas de la paramétrisation de la courbe géométrique.

Binormale et repère de Serret-Frenet

Comme dans le cas des courbes planes, le repère de Serret-Frenet est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée. Le vecteur $\vec{T}(s)$ est unitaire tangent à la courbe, la normale principale $\vec{N}(s)$ est orthogonale à $\vec{T}(s)$. Il est naturel de compléter cela en une base orthonormée en posant :

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s),$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel défini par :

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Définition 14. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée régulière et $\gamma(s)$ un point birégulier.

- La binormale à γ au point $\gamma(s)$ est le vecteur :

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s).$$

- Le repère de Serret-Frenet de γ au point $\gamma(s)$ est le repère orthonormé direct :

$$(\gamma(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)).$$

Torsion d'une courbe

On va maintenant étudier la torsion d'une courbe, autrement dit chercher à savoir comment "tourne" le repère de Serret-Frenet autour de la droite tangente à la courbe. Pour mesurer cela, on a besoin de la dérivée du vecteur binormal $\vec{B}$. Comme $\vec{B}$ fait intervenir la dérivée seconde de la paramétrisation, on est obligé de considérer ici des paramétrisations de classe C^3 .

On considère ici une courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée normale de classe C^3 et $\gamma(s)$ un point birégulier.

Proposition 9. *Le vecteur $\vec{B}'(s)$ est colinéaire à $\vec{N}(s)$. En particulier, il existe une application continue $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :*

$$\forall s \in I \quad \vec{B}'(s) = \tau(s) \vec{N}(s).$$

Démonstration : Pour tout $s \in I$, on a $\vec{B}(s) \cdot \vec{B}(s) = \|\vec{B}(s)\|^2 = 1$. En dérivant, on a :

$$\forall s \in I \quad \vec{B}'(s) \cdot \vec{B}(s) = 0.$$

De même, en dérivant le fait que pour tout $s \in I$ $\vec{B}(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$, on a :

$$\forall s \in I \quad \vec{B}'(s) \cdot \vec{T}(s) + \vec{B}(s) \cdot \vec{T}'(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{T}(s) = 0.$$

Le vecteur $\vec{B}'(s)$ est donc orthogonal à $\vec{T}(s)$ et $\vec{B}(s)$. Il est alors colinéaire à $\vec{N}(s)$ et on pose $\tau(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$. $\square$

Définition 15. *La torsion $\tau(s)$ d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne γ en un point $\gamma(s)$ est :*

$$\tau(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s).$$

Proposition 10. *La torsion est donnée pour tout $s \in I$ par :*

$$\tau(s) = -\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2}.$$

Démonstration : Cela consiste à faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \vec{N}(s) \cdot \vec{B}'(s) \\ &= \vec{N}(s) \cdot (\vec{T}'(s) \wedge \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \wedge \vec{N}'(s)) \\ &= \vec{N}(s) \cdot (\vec{T}(s) \wedge \vec{N}'(s)) \\ &= \det(\vec{N}(s), \vec{T}(s), \vec{N}'(s)) \\ &= -\det(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{N}'(s)) \\ &= -\det(\gamma'(s), R(s)\gamma''(s), R'(s)\gamma''(s) + R(s)\gamma'''(s)) \\ &= -R(s)^2 \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)) \\ &= -\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2} \end{aligned}$$

□

En pratique, le résultat suivant peut permettre de calculer la torsion pour une paramétrisation générale.

Proposition 11. *La torsion d'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 en un point $\gamma(t)$ vaut*

$$\tau(t) = -\frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Démonstration : Admise. □

La torsion mesure comment "tourne" le vecteur $\vec{B}$. Une interprétation géométrique de la torsion est donnée par la proposition suivante

Proposition 12. *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 dont tous les points sont biréguliers. Alors*

$$\text{la courbe } \gamma \text{ est plane} \iff \forall t \in I, \tau(t) = 0.$$

Démonstration : Voir exercice 15. □

Formules de Serret-Frenet

Comme pour les courbes planes, en chaque point d'une courbe gauche paramétrée régulière, on a un repère de Serret Frenet. Ce repère bouge avec le paramètre de la courbe. Les formules de Serret-Frenet expriment la dérivée de ce repère.

Proposition 13 (Formules de Serret Frenet). *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^3 et $\gamma(s)$ un point birégulier. Alors on a :*

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}'(s) \\ \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) = \tau(s)\vec{N}(s) \end{cases}$$

Démonstration : Il ne reste que la deuxième formule à montrer. Pour cela, on va calculer les coordonnées de $\vec{N}'(s)$ dans la base de Serret-Frenet.

Pour tout $s \in I$, on a $\vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) = 1$. En dérivant, cela donne :

$$\vec{N}'(s) \cdot \vec{N}(s) = 0.$$

En dérivant le fait que pour tout $s \in I$ $\vec{B}(s) \cdot \vec{N}(s) = 0$, on a :

$$\vec{N}'(s) \cdot \vec{B}(s) = -\vec{N}(s) \cdot \vec{B}'(s) = -\vec{N}(s) \cdot (\tau(s)\vec{N}(s)) = -\tau(s).$$

De même, en dérivant le fait que pour tout $s \in I$ $\vec{N}(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$, on a :

$$\vec{N}'(s) \cdot \vec{T}(s) = -\vec{N}(s) \cdot \vec{T}'(s) = -\vec{N}(s) \cdot (\kappa(s)\vec{N}(s)) = -\kappa(s).$$

□

1.4 Surfaces paramétrées

Dans cette partie, on va donner quelques rudiments concernant les surfaces paramétrées régulières. Comme dans le cas des courbes, la notion d'espace tangent est liée à la différentielle première et la forme de la surface est donnée par la différentielle seconde.

Définition des surfaces paramétrées

Définition 16. Une surface paramétrée de classe C^k ($k \geq 1$) est une application de classe C^k

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

où U est un domaine de $\mathbb{R}^2$ (ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$).

L'ensemble $S = f(U) = \{f(x, y), (x, y) \in U\}$ est appelé le *support géométrique* de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

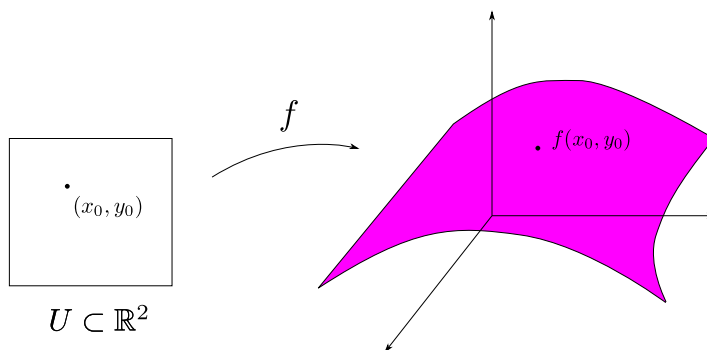


FIGURE 7 – Surface paramétrée

Reparamétrisation

Comme dans le cas des courbes, il est possible de reparamétriser les surfaces paramétrées par des difféomorphismes. Prenons une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ un C^1 difféomorphisme. Alors

$$f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que f . On dit que φ est un *changement de variable admissible* et que $f \circ \varphi$ est une *reparamétrisation* de f .

Rappel sur les différentielles

Le but de cette partie n'est pas de faire un cours précis sur les différentielles, mais de rappeler les notions utiles pour les surfaces. Pour plus de précisions, le lecteur pourra regarder le chapitre *Fonctions de plusieurs variables* de *Maths en Ligne*. Prenons une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 1$).

Définition 17.

- On dira que f est une application de classe C^1 si les dérivées partielles de f existent et sont continues.
- On appelle alors différentielle de f au point (a, b) l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, notée $Df(a, b)$ définie par :

$$Df(a, b) : (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h_x \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 14. Si f est une application de classe C^1 , le développement limité de f à l'ordre un est donné par :

$$f(x, y) = f(a, b) + Df(a, b) \cdot (h_x, h_y) + o\left(\sqrt{h_x^2 + h_y^2}\right),$$

avec $h_x = (x - a)$ et $h_y = (y - b)$.

De même, on dit qu'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 si les dérivées partielles d'ordre deux existent et sont continues. La différentielle seconde $D^2f(a, b) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est alors une application bilinéaire donnée pour tout $(h_x, h_y), (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par :

$$h_x k_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + (h_x k_y + h_y k_x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + h_y k_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 15. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^2 , le développement limité de f à l'ordre deux est donné par :

$$f(x, y) = f(a, b) + Df(a, b)(h_x, h_y) + \frac{1}{2} D^2f(a, b)(h_x, h_y)^2 + o((h_x^2 + h_y^2)),$$

avec $h_x = (x - a)$ et $h_y = (y - b)$.

Espace tangent à une surface

Prenons une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 . Remarquons que si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ est une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres U , alors l'application

$$f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support $S = f(U)$ (Figure 8).

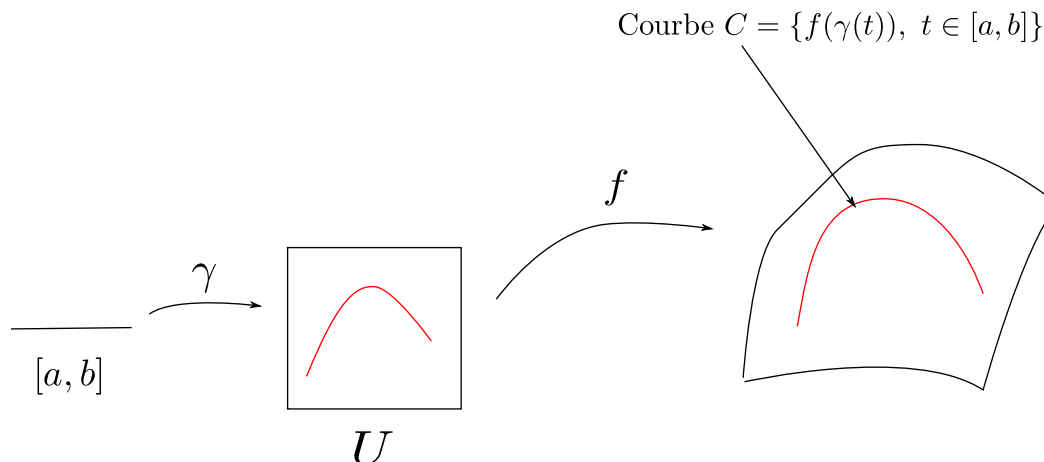


FIGURE 8 – Courbe sur une surface

En particulier, prenons un point $m_0 = f(x_0, y_0)$ de la surface et considérons deux intervalles I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ tels que $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2 \subset U$. On peut considérer la courbe coordonnée γ_{x_0} (avec $x_0 \in I_1$) :

$$\gamma_{x_0} : y \in I_2 \mapsto f(x_0, y).$$

Clairement, γ_{x_0} est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $S = f(U)$. Si cette courbe est régulière en $y = y_0$ cela signifie que le vecteur $\gamma'_{x_0}(y_0)$ est tangent à la courbe γ_{x_0} au point $m_0 = \gamma_{x_0}(y_0)$. De même, on peut considérer la courbe coordonnées γ_{y_0} (avec $y_0 \in I_2$) :

$$\gamma_{y_0} : x \in I_1 \mapsto f(x, y_0).$$

Si cette courbe est régulière en $x = x_0$ cela signifie que le vecteur $\gamma'_{y_0}(x_0)$ est tangent à la courbe γ_{y_0} au point $m_0 = \gamma_{y_0}(x_0)$. Or, par définition des dérivées partielles, nous avons :

$$\gamma'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \gamma'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ceci motive la définition d'espace tangent à une surface :

Définition 18. L'espace tangent à une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ au point $m_0 = f(x_0, y_0)$ est l'espace affine, noté $T_{m_0}S$ (avec $S = f(U)$) passant par m_0 et engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

En pratique, l'espace tangent $T_{m_0}S$ désigne aussi l'espace vectoriel qui dirige l'espace affine défini ci-dessus à savoir donc l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition 19.

— La surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière au point $m = f(x, y)$ si les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont libres.

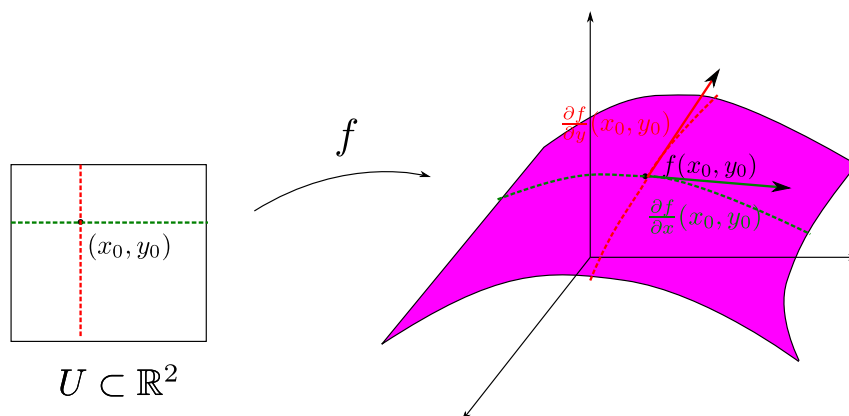


FIGURE 9 – Dérivées partielles de la paramétrisation

- La surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière si elle est régulière en tout point.

On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Au final, on peut retenir que si la surface est régulière, alors l'espace tangent $T_m S$ définit en tout point m par l'application f est de dimension deux : on l'appelle aussi *plan tangent*.

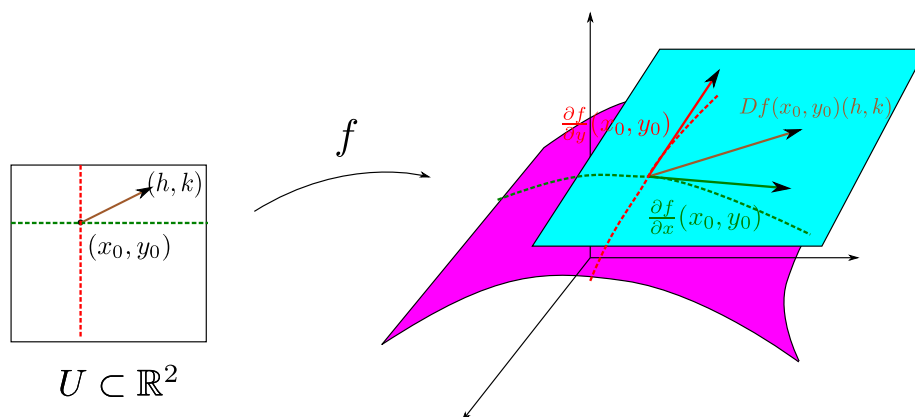


FIGURE 10 – Espace tangent d'une surface paramétrée régulière

Longueur et aire

Prenons une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des

paramètres U . Alors $f \circ \gamma$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support $S = f(U)$ (Figure 8). Sa longueur est donnée par :

$$l(f \circ \gamma) = \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_a^b \|Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\| dt.$$

Autrement dit, pour connaître la longueur de la courbe $f \circ \gamma$, on a besoin de la différentielle Df et de la dérivée de γ . Par ailleurs, on donne sans preuve le résultat qui donne l'aire d'une surface :

Proposition 16. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de classe C^1 . Alors l'intégrale :

$$\int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| dudv$$

ne dépend pas de la paramétrisation.

Définition 20. L'aire de la surface $S = f(U)$ paramétrée par $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est :

$$\int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| dudv.$$

Exemple : On considère le tore de révolution $f : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétré par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}.$$

L'aire de cette surface est donnée par :

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |r(R + r \cos x)| dx dy = 4\pi^2 r R.$$

Allure locale d'une surface

On s'intéresse ici à la forme de la surface localement. Rappelons que pour les courbes paramétrées régulières, la dérivée de la paramétrisation donne un vecteur tangent à la courbe, et la dérivée seconde permet de calculer la courbure. Pour les surfaces, il en est de même : la différentielle de la paramétrisation f permet de définir l'espace tangent. Pour avoir une idée de la forme, on peut faire un développement limité à l'ordre deux.

Cas particulier

Pour simplifier, on va supposer que la surface est paramétrée par une application de la forme :

$$f(x, y) = (x, y, \phi(x, y)),$$

avec $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. (En fait, on peut montrer que l'on peut toujours se ramener localement à une telle forme, et que cette hypothèse n'est pas restrictive.) D'autre part, quitte à faire un changement de repère, on peut supposer que $\phi(0,0) = 0$ et que $D\phi(0,0) = 0$. Dans le nouveau repère, cela revient à avoir que la surface passe par le point de coordonnées $(0,0,0)$ et que le plan tangent en ce point est horizontal. Dans ce cas là, le développement limité de ϕ en $(0,0)$ est :

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}D^2\phi(0,0)(x,y)^2 + o((x^2 + y^2)),$$

avec

$$D^2\phi(0,0)((x,y), (x,y)) = x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0,0) + 2xy \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0,0) + y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0,0).$$

La forme bilinéaire symétrique $D^2\phi(0,0)((x,y), (x,y))$ donne ainsi des informations sur l'allure de la surface au voisinage du point $m = f(0,0) = (0,0,0)$. Il s'agit de la *deuxième forme fondamentale*.

Cas général

Dans le cas d'une paramétrisation régulière quelconque, la définition de la deuxième forme fondamentale fait aussi intervenir la différentielle première. Rappelons que si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée régulière de classe C^2 , alors les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ forment une base de l'espace tangent $T_m S$ à $S = f(U)$ au point $m = f(x,y)$. Tout vecteur de $T_m S$ s'exprime donc dans cette base :

$$\forall v \in T_m S \quad \exists (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \quad v = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

On note $K(x,y)$ le vecteur orthogonal à l'espace tangent $T_m S$ donné par :

$$K(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\|}.$$

Définition 21. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de classe C^2 . La deuxième forme fondamentale II_m en un point $m = f(x,y)$ est la forme quadratique sur l'espace tangent $T_m S$ définie par :

$$\forall v = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in T_m S, \quad II_m(v) = v_x^2 L_m + 2v_x v_y M_m + v_y^2 N_m,$$

où

$$L_m = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot K(x,y) \quad M_m = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot K(x,y) \quad N_m = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot K(x,y).$$

On peut montrer que la deuxième forme fondamentale II_m au point m ne dépend pas (au signe près) du choix de la paramétrisation.

Remarques :

- Si $f : (x, y) \in U \mapsto (x, y, \phi(x, y))$ est une surface paramétrée de classe C^2 , avec $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant $\phi(0, 0) = 0$ et $D\phi(0, 0) = 0$, alors la deuxième forme fondamentale de f au point $m = f(0, 0)$ est donnée par :

$$II_m = D^2\phi(0, 0).$$

- L'espace vectoriel $T_m S$ est naturellement munit d'un produit scalaire : en effet, comme $T_m S \subset \mathbb{R}^3$, deux vecteurs de $T_m S$ sont aussi des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et on peut faire leur produit scalaire.

Comme $T_m S$ est un espace vectoriel de dimension deux munit d'un produit scalaire, on peut utiliser le résultat d'algèbre suivant :

Proposition 17. *Soient V est un espace vectoriel de dimension deux munit d'un produit scalaire et $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur V . Alors il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de V telle que :*

$$\forall v = (v_x, v_y) = v_x e_1 + v_y e_2 \in V \quad Q(v_x, v_y) = v_x^2 \lambda_1 + v_y^2 \lambda_2,$$

où

$$\lambda_1 = \min_{v \neq 0} \frac{Q(v)}{\|v\|^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \max_{v \neq 0} \frac{Q(v)}{\|v\|^2}.$$

On peut montrer que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors la base orthogonale (e_1, e_2) dans laquelle la forme quadratique est diagonale est unique (à l'orientation près des vecteurs). En appliquant cette proposition à la deuxième forme fondamentale II_m au point $m = f(x, y)$, on sait qu'il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de $T_m S$ telle que :

$$\forall v = (v_x, v_y) = v_x e_1 + v_y e_2 \in T_m S \quad II_m(v_x, v_y) = v_x^2 \lambda_1 + v_y^2 \lambda_2,$$

où

$$\lambda_1 = \min_{v \neq 0} \frac{Q(v)}{\|v\|^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \max_{v \neq 0} \frac{Q(v)}{\|v\|^2}.$$

On définit alors :

Définition 22.

- Les directions principales de S au point m sont les vecteurs e_1 et e_2 .
- Les courbures principales de S au point m sont les nombres λ_1 et λ_2 .
- La courbure de Gauss de S au point m est le produit $\lambda_1 \lambda_2$.

Interprétation géométrique

Pour tout vecteur $v \in T_m S$, $II_m(v)$ est la courbure de la surface au point m dans la direction v . En particulier, λ_1 est la courbure de la surface S dans la direction e_1 et λ_2 est la courbure de la surface S dans la direction e_2 . Le résultat d'algèbre précédent est assez surprenant dans la mesure où il nous dit que pour tout point de toute surface

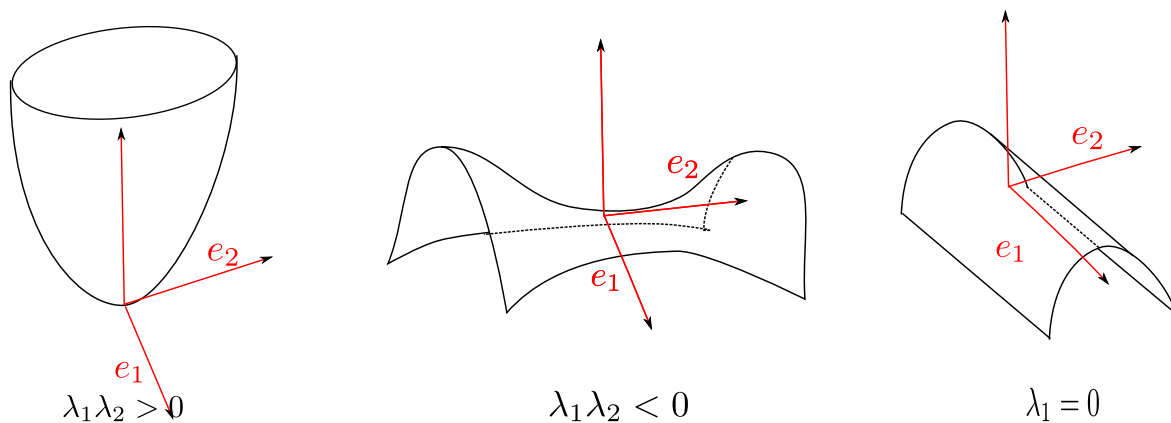


FIGURE 11 – Allure locale de la surface en fonction du signe des courbures principales

régulière de classe C^2 , **la direction dans laquelle la surface est la plus courbée et la direction dans laquelle la surface est la moins courbée sont orthogonales.**

D'autre part, si on exprime localement la surface S comme un graphe au-dessus de son espace tangent et que l'on met l'origine au point m , on peut supposer que $f(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ avec $m = (0, 0, 0) = f(0, 0)$ et $Df(0, 0) = 0$. De plus, si on exprime ϕ dans la base des directions principales (e_1, e_2) du plan tangent $T_m S$ on a :

$$f(x, y) = (x, y, \phi(x, y)) \quad \text{avec} \quad \phi(x, y) = \frac{1}{2} (\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + o(x^2 + y^2).$$

Il est clair sur cette formule que l'allure de la surface au voisinage du point m dépend du signe de λ_1 et de λ_2 , (Figure 11) :

- Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, la surface ressemble localement à un parabolöide.
- Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ la surface ressemble localement à une "selle de cheval".
- Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, la surface ressemble localement à un cylindrique.

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☐ Toute courbe paramétrée de classe C^2 est régulière.
2. ☒ Toute courbe paramétrée régulière a un espace tangent en tout point.
3. ☐ Si une courbe paramétrée admet une droite tangente en un point, alors elle est régulière en ce point.
4. ☐ Toute paramétrisation de la courbe géométrique d'équation $y = x^2$ est régulière.
5. ☒ Il existe une paramétrisation régulière de la courbe géométrique d'équation $y = x^2$.
6. ☐ Toute paramétrisation de la courbe géométrique d'équation $y = \sqrt{|x|}$ (avec $x \in \mathbb{R}$) est régulière.
7. ☐ Il existe une paramétrisation régulière de la courbe géométrique d'équation $y = \sqrt{|x|}$ (avec $x \in \mathbb{R}$).

Vrai-Faux 2. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☒ Pour toute courbe paramétrée, il existe une paramétrisation non régulière.
2. ☒ Toute courbe normale est régulière.
3. ☐ Si une courbe a une courbure nulle alors elle est plane.
4. ☐ La tangente à une courbe en un point d'inflexion traverse la courbe.
5. ☐ La tangente à une courbe en un point d'inflexion ne traverse jamais la courbe.
6. ☒ Si m est un point d'inflexion d'une courbe, alors la courbure en ce point est nulle.

Vrai-Faux 3. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☒ Une courbe rectifiable a une longueur finie.
2. ☐ La longueur d'une courbe paramétrée sur un intervalle $[a, b]$ de longueur finie est forcément finie.
3. ☐ Si une courbe est rectifiable, alors elle est de classe C^1 .
4. ☒ Si une courbe paramétrée est de classe C^1 , alors elle est rectifiable.
5. ☐ Si une courbe paramétrée est rectifiable, alors il existe toujours un reparamétrage qui soit de classe C^1 .
6. ☐ La longueur de la courbe paramétrée $\gamma : t \in [0, 4\pi] \mapsto (R \cos t, R \sin t, 3)$ vaut $2\pi R$.

Vrai-Faux 4. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☐ La courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto (t^2, t^3, t^4)$ n'admet pas de droite tangente en $t = 0$.
2. ☒ La droite tangente à la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto (t, t^2 - 1, 4 + t^5)$ en $t = 0$ a pour équation

$$\begin{cases} x = u \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

3. ☒ La droite tangente à la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto (2 + t^3, 2t^2, t^5)$ en $t = 0$ a pour équation

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

4. ☐ La droite tangente à la courbe paramétrée $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ en $t = \pi/4$ a pour équation

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2}/2 \\ y = \sqrt{2}/2 \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

5. ☒ La droite tangente à la courbe d'équation $y = 3x^3$ au point $(2, 24)$ a pour équation

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 24 + 36u \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

6. ☒ La droite tangente à la courbe d'équation $y = -2x^2 + 1$ au point $(1, -1)$ a pour équation

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 4 + u \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

Vrai-Faux 5. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☐ La surface paramétrée $f : (x, y) \mapsto (x, |x + 3| + 1, y)$ est régulière.
2. ☐ La surface paramétrée $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - 5y^2 + 3, 2x^2 - y^2, 15x^2)$ est régulière en tout point.
3. ☒ Il existe une paramétrisation régulière de la surface paramétrée $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - 5y^2 + 3, 2x^2 - y^2, 15x^2)$.
4. ☒ Le tore admet une paramétrisation régulière
5. ☐ Toute paramétrisation du carré $\{(x, y, 0), x \in [0, 1] \text{ et } y \in [0, 1]\}$ est régulière.
6. ☐ Il existe une paramétrisation régulière du cube $\{(x, y, z), \sup(|x|, |y|, |z|) = 1\}$.

Vrai-Faux 6. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☒ la torsion de l'hélice paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ est constante.

2. ☐ Toute courbe sur la sphère a une torsion qui est non nulle en au moins un point.
3. ☒ Pour chaque courbe paramétrée régulière rectifiable, il existe une infinité de reparamétrisation par abscisse curviligne.
4. ☒ Une courbe paramétrée a une courbure identiquement nulle si et seulement si son support géométrique est un segment.
5. ☐ Une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ à courbure constante $\kappa \neq 0$ est forcément inclus dans un cercle.

Vrai-Faux 7. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☒ Une surface paramétrée de la forme $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, z = \phi(x, y))$ est toujours régulière.
2. ☐ Le support de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x - 5y + 2, 2x - 26y, 15)$ est une sphère.
3. ☒ Le support de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - 5y + 3, 2x - y, 15x)$ est un plan affine.
4. ☐ Le support de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - 5y^2 + 3, 2x^2 - y^2, 15x^2)$ est un plan affine.
5. ☒ Le support de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^3 - 5y^3 + 3, 2x^3 - y^3, 15x^3)$ est un plan affine.
6. ☒ Le support de $f : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, t)$ est un cône.

Vrai-Faux 8. Les phrases suivantes sont-elles justes ?

1. ☒ Le support de la surface paramétrée $f : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, \sin t)$ est une sphère.
2. ☒ Le support de la surface paramétrée $f : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, t)$ est un cylindre.
3. ☐ Le support de la surface paramétrée $f : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t)$ est un paraboloïde.
4. ☒ Si les courbures principales au point m sont de même signe et non nulles, alors la surface est localement du même côté de l'espace tangent.
5. ☒ Si les courbures principales au point m sont de signe opposé, alors l'espace tangent en m traverse localement la surface.
6. ☐ Si les deux courbures principales au point m sont nulles, alors la surface est localement un plan.
7. ☐ Si une des deux courbures principales au point m est nulle, alors l'espace tangent en m traverse localement la surface.
8. ☐ Si une des deux courbures principales au point m est nulle, alors l'espace tangent en m ne traverse pas localement la surface.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes :

$$\gamma_1 : t \mapsto (t^3 - t^4, t^6) \quad \gamma_2 : t \mapsto (t^2, t^2 + t^4) \quad \gamma_3 : t \mapsto (t^3, t^3 + t^5),$$

répondre aux questions suivantes

1. La courbe est-elle régulière en $t = 0$?
2. En faisant un développement limité, indiquer la forme de la courbe au voisinage de $t = 0$.

Exercice 2.

1. Déterminer la droite tangente à la courbe $\gamma : t \mapsto (R \cos t, R \sin t, 3t)$ en $t = \pi$.
2. Déterminer la droite tangente à la courbe $\gamma : t \mapsto (R \cos t, R \sin t, 3t)$ en $t = 2\pi$.
3. Déterminer la droite tangente à la courbe $\gamma : t \mapsto ((t-1)^2, (t-1)^4)$ en $t = 1$.
4. Déterminer la droite tangente à la courbe $\gamma : t \mapsto (t, \cos t)$ en $t = \pi/4$.
5. Déterminer la droite tangente à la courbe $\gamma : t \mapsto (t+2, 3t+4, t-5)$ en $t = 1056$.

Exercice 3. On considère la courbe paramétrée donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\gamma(t) = (\sqrt[3]{t}, |t|)$$

1. Montrer que la courbe n'est pas régulière en $\gamma(0)$.
2. Montrer que la courbe admet une tangente en $\gamma(0)$.

Exercice 4. On considère les deux courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (t, t^{\frac{3}{2}}) & \text{si } t > 0 \\ (|t|, -|t|^{\frac{3}{2}}) & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \gamma_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

1. Ces deux courbes sont-elles régulières ?
2. Quelle est la régularité de chacune de ces deux courbes ? (*sont elles continues, de classe C^1 , C^2 , C^n , ... ?*)
3. Donner l'allure locale de γ au voisinage de $t = 0$.
4. Que pouvez-vous dire du support géométrique de chacune de ces deux courbes ?
5. Quelle(s) conclusion(s) en tirez-vous ?

Exercice 5 (Courbe non rectifiable). On considère la courbe paramétrée $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t \sin(\pi/t)) & \text{si } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que γ est continue.
2. Montrer, géométriquement, que la longueur de la portion de courbe entre les paramètres $1/(n+1)$ et $1/n$ est au moins $2/(n + \frac{1}{2})$.
3. En déduire que la longueur de la courbe sur l'intervalle $[1/N, 1]$ est plus grande que

$$\sum_{n=1}^N \frac{2}{n+1}.$$

4. Montrer que la longueur de la courbe γ est infinie.

Exercice 6. Dans l'espace euclidien de dimension trois, on considère le segment $\mathcal{C} = [A, B]$, où A et B sont deux points de l'espace.

1. Donner une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Donner une paramétrisation par abscisse curviligne de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Quelle est la courbure de cette courbe ?
4. Quelle est sa torsion ?

Exercice 7. Calculer la longueur de l'arc de parabole $y = x^2$ entre les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Exercice 8. Calculer la longueur des courbes suivantes

- La courbe paramétrée par $t \in [-1, 2] \mapsto (3t, 3t^2)$.
- La courbe paramétrée par $t \in [0, \pi] \mapsto (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \sin t \cos t)$.

Exercice 9. Déterminer une abscisse curviligne de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) &= t - \operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) \\ y(t) &= 2\operatorname{ch}(t)(t) \end{cases}$$

Exercice 10. On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Donner une paramétrisation de l'ellipse.
2. Calculer la longueur de l'ellipse.
3. Calculer la courbure de l'ellipse en tout point.
4. Quels sont les points les plus courbés ?
5. Que pouvez-vous dire de la torsion de l'ellipse ?

Exercice 11. Calculer la courbure et la torsion des courbes paramétrées $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ suivantes (avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) :

1. $\gamma_1(t) = (t, t+1, 1-t^2)$.

2. $\gamma_2(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t)), bt)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
3. $\gamma_3(t) = (e^t, e^t, \sqrt{2t})$.
4. $\gamma_4(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t), e^t)$.

Exercice 12. Déterminer la courbure et la torsion de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\gamma(t) = (t^3, t, t^2)$.

Exercice 13. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par abscisse curviligne, régulière et de classe C^2 . On suppose qu'il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$ $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$.

1. Montrer que la courbure algébrique de la courbe est donnée par

$$\bar{\kappa} = \frac{\varphi''}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. À quelle condition γ est-elle paramétrée par abscisse curviligne ?
3. Expliquer le résultat précédent à partir d'un dessin.

Exercice 14. Une courbe plane est souvent définie en coordonnées polaires par $r = r(\theta)$. Autrement dit, la paramétrisation de la courbe est de la forme :

$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta),$$

où θ appartient à un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Calculer la longueur d'arc en coordonnées polaires.
2. Calculer la courbure en coordonnées polaires.

Exercice 15 (Caractérisation de la torsion). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^3 dont tous les points sont biréguliers. Montrer que :

$$\text{la courbe } \gamma \text{ est plane} \iff \forall t \in I, \tau(t) = 0.$$

(Indication : on pourra prendre une paramétrisation par abscisse curviligne.)

Exercice 16 (Courbes cycloïdales). Soit $a \in [0, 1]$ et $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\gamma_a(t) = (t - a \sin t, 1 - a \cos t)$. Cette courbe paramétrise le trajet d'un point d'une roue (de rayon 1), lorsque celle-ci se déplace en ligne droite. Ce point se situe à une distance a du centre de la roue.

1. Montrer que γ_a est régulier en 0 si et seulement si $a \neq 0$.
2. Pour $a = 1$ et $a = 1/2$, déterminer l'allure locale de la courbe au voisinage de 0.
3. Tracer les deux courbes correspondants à $a = 1$ et $a = 1/2$.

Exercice 17 (La tractrice ou "courbe du chien"). La tractrice est la courbe paramétrée $\gamma :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée pour tout $t \in]0, \pi/2[$ par :

$$\gamma(t) = \left(\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right).$$

1. Montrer que γ est régulière.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_t$ tangente à γ au point $\gamma(t)$.
3. On note p_t le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_t$ et $(0y)$. Montrer que le segment $[\gamma(t), p_t]$ est de longueur 1.
4. Dessiner cette courbe. Pourquoi, à votre avis, cette courbe s'appelle-t-elle aussi la courbe du chien ?

Exercice 18 (Interpolation d'Hermite). On s'intéresse au problème suivant : étant donné deux points p et q du plan, et deux vecteurs $\vec{t}_p$ et $\vec{t}_q$, on cherche une courbe paramétrée joignant p à q dont la dérivée (à droite) en p vaut $\vec{t}_p$ et la dérivée (à gauche) en q vaut $\vec{t}_q$. On note (x_p, y_p) , (x_q, y_q) , (u_p, v_p) et (u_q, v_q) les coordonnées respectives de p , q , $\vec{t}_p$ et $\vec{t}_q$. On suppose que $x_p \neq x_q$, $u_p = v_p = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_1 tel que

$$P_1(x_p) = 1 \text{ et } P_1'(x_p) = P_1'(x_q) = P_1(x_q) = 0.$$
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_2 tel que

$$P_2'(x_p) = 1 \text{ et } P_2'(x_q) = P_2(x_p) = P_2(x_q) = 0.$$
3. Déterminer un polynôme P de degré trois tel que

$$P(x_p) = y_p, P(x_q) = y_q, P'(x_p) = v_p \text{ et } P'(x_q) = v_q.$$
4. Que pouvez-vous dire de la courbe paramétrée $\gamma : t \in [x_p, x_q] \mapsto (t, P(t))$?

Exercice 19 (Polynôme de Bézier). On considère la courbe plane paramétrée qui à $t \in [0, 1]$ associe $\gamma(t) = (t, t^2)$. On rappelle que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égaux à 2 est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, dont la base des monômes (e_0, e_1, e_2) est :

$$e_0 : t \mapsto 1 \quad e_1 : t \mapsto t \quad e_2 : t \mapsto t^2.$$

On définit les polynômes de Bernstein pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2.$$

1. Déterminer des points P_0, P_1, P_2 tels que $\gamma = P_0 e_0 + P_1 e_1 + P_2 e_2$.
2. Déterminer des points Q_0, Q_1, Q_2 tels que $\gamma = Q_0 B_0^2 + Q_1 B_1^2 + Q_2 B_2^2$.
3. Que représentent les points Q_0 et Q_2 pour γ ?
4. Que représente le vecteur $Q_1 - Q_2$ et $Q_2 - Q_1$ pour γ ?

Exercice 20 (Difficile). On considère une courbe paramétrée par abscisse curviligne, birégulière $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^3 (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que la torsion τ ne s'annule pas. On note κ la courbure et (T, N, B) la base de Serret-Frenet. Par définition, on dit que γ est une *hélice généralisée* s'il existe un vecteur constant V_0 tel que pour tout $s \in I$ l'angle entre les vecteurs $T(s)$ et V_0 est constant.

Le but de cet exercice est de donner des caractérisations des hélices généralisées.

1. Dessiner une hélice généralisée.
2. On suppose que γ est une hélice généralisée. Montrer que le rapport $\frac{\kappa}{\tau}$ est constant. (*indication : on pourra dériver deux fois le produit scalaire de $T(s)$ et V_0*).
3. Réciproque : on suppose maintenant que le rapport $\frac{\kappa}{\tau}$ est constant. Montrer que γ est une hélice généralisée. (*indication : on pourra chercher V_0 sous la forme $T(s) + \lambda B(s)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$*).
4. Montrer que γ est une hélice généralisée si et seulement si N appartient à un plan vectoriel constant.
5. Montrer que γ est une hélice généralisée si et seulement si il existe un vecteur constant W_0 tel que pour tout $s \in I$ l'angle entre les vecteurs $B(s)$ et V_0 est constant.

Exercice 21 (Difficile). On considère une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par abscisse curviligne (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un point $\gamma(s)$ est dit birégulier si $\gamma''(s) \neq 0$. En un point birégulier $\gamma(s)$, on note $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Serret-Frenet.

On suppose tout d'abord que pour tout $s \in I$, $\gamma(s)$ est inclus dans une sphère de rayon R et de centre O .

- a) Montrer que pour tout $s \in I$, $\gamma(s)$ appartient au plan vectoriel engendré par $N(s)$ et $B(s)$.
- b) Montrer que γ est une courbe birégulière.

(Indication pour a) et b) : on pourra dériver $s \mapsto \|\gamma(s)\|^2$).

On suppose maintenant en plus que la torsion τ ne s'annule pas. On pose alors $\rho = 1/\kappa$ et $\sigma = 1/\tau$.

- c) Montrer que pour tout $s \in I$, $\langle \gamma(s), N(s) \rangle = -\rho(s)$.
- d) En dérivant l'expression précédente, exprimer $\gamma(s)$ comme combinaison linéaire de $N(s)$ et $B(s)$.
- e) En déduire que l'on a :

$$\rho^2 + \sigma^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = \text{constante}$$

Exercice 22 (Difficile). On s'intéresse ici à la réciproque de l'exercice 21. On considère une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par abscisse curviligne (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un point $\gamma(s)$ est dit birégulier si $\gamma''(s) \neq 0$. En un point birégulier $\gamma(s)$, on note $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Serret-Frenet.

On suppose que :

- i) γ est une courbe birégulière ;
- ii) la torsion τ de γ ne s'annule pas ;
- iii) ρ' ne s'annule pas (avec $\rho = 1/k$) ;
- iv) on a l'équation :

$$\rho^2 + \sigma^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = \text{constante}.$$

Le but de cette partie est de montrer que la courbe γ est incluse dans une sphère.

1. Montrer que la dérivée de la fonction

$$s \mapsto \gamma(s) + \rho(s)N(s) + \sigma(s)\frac{d\rho}{ds}(s)B(s)$$

est nulle.

2. En déduire qu'il existe un point Ω de $\mathbb{R}^3$ tel que $\|\gamma(s) - \Omega\|$ soit constant.
3. Conclure.

Surfaces

Exercice 23. Trouver une équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0, y_0, z_0)

1. $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, \sqrt{21 - x^2 - y^2})$ avec $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 4)$.
2. $f : (x, y) \mapsto (15x - 2y, 3x + 17y + 9, 23x + 17y + 22)$ avec $(x_0, y_0, z_0) = f(2, 3)$

Exercice 24. On demande à un étudiant de donner une équation du plan tangent à la surface paramétrée $f : (x, y) \mapsto (x^2 - 3y, 2x^3 - y^4, x)$ au point $f(0, 0)$. Sa réponse est $z = 4x^2 - 3y^2$.

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi la réponse est mauvaise.
2. Donner la réponse exacte.

Exercice 25. Calculer l'aire des surfaces paramétrées suivantes :

1. $f : (t, \theta) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\mapsto (R \cos t \cos \theta, R \cos t \sin \theta, R \sin t)$ avec $R \in \mathbb{R}$.
2. $f : (t, \theta) \in]0, H[\times]0, 2\pi[\mapsto (a \cos \theta, a \sin \theta, t)$ (avec $a, H \in \mathbb{R}$)
3. $f : (t, \theta) \mapsto ((2 + \cos t) \cos \theta, (2 + \cos t) \sin \theta, \sin t)$.

Exercice 26. Soient a et b deux nombres réels et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par

$$f(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Montrer que l'intersection du plan tangent avec le support géométrique de la surface est la réunion de deux droites sécantes.

Exercice 27. Soient a et b deux nombres réels, $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les surfaces paramétrées par

$$f_1(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} \right) \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^4}{b^2} \right)$$

1. Pour $i \in \{1, 2\}$, déterminer l'espace tangent à la surface f_i au point $m = f_i(0, 0) = (0, 0, 0)$.
2. Donner la deuxième forme fondamentale en m dans chacun des deux cas.
3. Quel est la position par rapport au plan tangent au point m dans chacun des deux cas.
4. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 28. Les deux surfaces paramétrées suivantes ont-elles le même support géométrique ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_2(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t^2)$

Exercice 29. Une surface de révolution d'axe $(0z)$ est une surface paramétrée de la forme

$$f(t, \theta) = (\alpha(t) \cos \theta, \beta(t) \sin \theta, \beta(t))$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Pourquoi une telle surface s'appelle-t-elle "surface de révolution" ?
2. Calculer la deuxième forme fondamentale.
3. En déduire les deux courbures principales.
4. Application : calculer avec cette méthode les courbures principales de la sphère.

Exercice 30 (Difficile). On considère la surface paramétrée $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(s, v) = (\cos s, \sin s, 0) + v(-\sin s, \cos s, 1).$$

1. Cette surface est dite réglée. Voyez-vous pourquoi ? Donner une description géométrique de cette surface basée sur des droites.
2. Notons $x(s, v)$, $y(s, v)$ et $z(s, v)$ les coordonnées de $f(s, v)$. Calculer $x(s, v)^2 + y(s, v)^2 - z(s, v)^2$. Qu'en déduisez-vous ?

3. Une surface de révolution est obtenue en faisant tourner une courbe autour d'un axe (voir l'exercice précédent pour une paramétrisation). Cette surface est-elle une surface de révolution ? Si oui, donner l'axe de révolution ainsi que l'équation d'une courbe plane qui engendre la surface.
4. Calculer la deuxième forme fondamentale.
5. Que pouvez-vous dire du signe du produit des courbures principales ?

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1.

- ☐ A La longueur de la courbe $\gamma : t \in [-2\pi, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 1)$ est $2\pi R$.
- ☐ B La longueur de la courbe $\gamma : t \in [-2\pi, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 2)$ est $4\pi R$.
- ☐ C La longueur de la courbe $\gamma : t \in [0, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 2t)$ est $2\pi\sqrt{R^2 + 2}$.
- ☐ D La longueur de la courbe $\gamma : t \in [0, 3[\mapsto (t, 2t^2)$ est $\frac{sh(2argsh(12))}{16} + \frac{argsh(12)}{8}$.
- ☐ E La longueur de la courbe $\gamma : t \in [0, 2\pi[\mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$ est 10.

Question 2. On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{si } t \geq 0 \\ (t^2, -t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- ☐ A La courbe γ est régulière.
- ☐ B La courbe γ admet une tangente en tout point.
- ☐ C La courbe γ est de classe C^1 .
- ☐ D La courbe γ est de classe C^2 .
- ☐ E La droite tangente au point de paramètre π passe par 0.

Question 3. On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t - sh\ t\ ch\ t, 2ch\ t) \end{aligned}$$

- ☐ A Une abscisse curviligne est donnée par $s(t) = sh^2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
- ☐ B Une abscisse curviligne est donnée par $s(t) = sh^2(t)$ si $t \geq 0$ et par $s(t) = -sh^2(t)$ si $t < 0$.

- ☐ C La courbe est de classe C^3
- ☐ D La courbe paramétrée γ est régulière.
- ☐ E La droite tangente au point de paramètre 1 est horizontale.

Question 4. On considère la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée par abscisse curviligne régulière de classe C^3 .

- ☐ A La courbe est plane si et seulement si sa torsion est nulle.
- ☐ B La courbe est inclus dans une sphère si et seulement si sa courbure est constante.
- ☐ C La courbe est inclus dans un cercle si et seulement si sa courbure est constante.
- ☐ D Si la courbe a une courbure nulle, alors elle a un point d'inflexion.
- ☐ E La longueur de la courbe entre les paramètres -10 et 10 est forcément finie.

Question 5. On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2 - 2t^3, 5t^3 + 1) \end{aligned}$$

- ☐ A La droite tangente au paramètre $t = 0$ est verticale.
- ☐ B La droite tangente au point de paramètre $t = 1$ a pour équation

$$\begin{cases} x = -1 - 4u \\ y = 6 + 15u \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

- ☐ C La droite tangente au point de paramètre $t = 1$ a pour équation

$$\begin{cases} x = -5 - 4u \\ y = 2 + 5u \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

- ☐ D La droite tangente au point de paramètre $t = 0$ a pour équation

$$\begin{cases} x = u \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

- ☐ E La droite tangente au point de paramètre $t = 1$ a pour équation

$$\begin{cases} x = u^2 + 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}$$

Question 6.

- ☐ D La longueur de la courbe $\gamma : t \in [0, 2[\mapsto (t, 2t^2)$ est $\frac{\text{sh}(2\text{argsh}(4))}{16} + \frac{\text{argsh}(4)}{8}$.
- ☐ B La longueur de la courbe $\gamma : t \in [0, 2[\mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ est 2π .
- ☐ C La courbure de la courbe $\gamma : t \in [0, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 2t)$ est constante égale à $\frac{R}{4+R^2}$.

- ☐ D La torsion de la courbe $\gamma : t \in [0, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 2t)$ est constante égale à $\frac{R}{4+R^2}$.
- ☐ E La développée de la courbe $\gamma : t \in [0, 2\pi[\mapsto (R \sin t, R \cos t, 2t)$ est une hélice.

Question 7. On considère la surface paramétrée $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 + 3, x^2 - y^2, 5x^2 + 7)$

- ☐ A Le support de f est inclus dans un plan affine.
- ☐ B Le support de f est inclus dans un parabololoïde.
- ☐ C La surface paramétrée f est régulière.
- ☐ D La surface paramétrée f admet une reparamétrisation régulière.
- ☐ E La courbure de cette surface est non nulle aux points de paramètres $(x, y) \neq (0, 0)$.

Question 8. On considère la surface paramétrée

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (5x - 3y^2 + 3, -x + y^2, 3x - 4y^2)$$

- ☐ A L'espace tangent au point de paramètres $(0, 0)$ est donné par

$$\begin{cases} 3 + 5u \\ -u \\ 3u \end{cases} \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^2$$

- ☐ B L'espace tangent au point de paramètres $(1, 1)$ est donné par

$$\begin{cases} 3 + 5u - 6v \\ -u + 2v \\ 3u - 8v \end{cases} \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^2$$

- ☐ C L'espace tangent au point de paramètres $(0, 1)$ est donné par

$$\begin{cases} -6v \\ 1 + 2v \\ -4 - 8v \end{cases} \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^2$$

- ☐ D L'espace tangent au point de paramètres $(1, 0)$ est donné par

$$\begin{cases} 5u - 6v \\ -u + 2v \\ 3u - 8v \end{cases} \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}^2$$

- ☐ E La surface est régulière en tout paramètres $(x, y) \neq (0, 0)$.

Question 9. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f(x, y) = (x, y, 15x^2 + 13y^3 + 7)$.

- ☐ A Le plan tangent en $f(0, 0)$ est horizontal.
- ☐ B Le plan tangent en $f(0, 0)$ traverse la surface.
- ☐ C Les deux courbures principales en $f(0, 0)$ sont strictement positives.
- ☐ D La surface est un paraboloïde de révolution.
- ☐ E Le plan tangent en $f(0, 0)$ passe par le point $(0, 0, 0)$.

Question 10. Soit $f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t)$.

- ☐ A Le support géométrique est un cylindre.
- ☐ B Le support géométrique est un cône.
- ☐ C La paramétrisation est régulière en tout point.
- ☐ D La paramétrisation admet un espace tangent en $(0, 0, 0)$.
- ☐ E Il existe une infinité de points réguliers.

Réponses : 1-BD 2-CE 3-BC 4-AE 5-BC 6-CE 7-AD 8-AC 9-AB 10-BE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé.

Question de cours : Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^3 , dont tous les points sont biréguliers.

- Donner la définition du repère de Serret-Frenet.
- Donner les formules de Serret-Frenet.

Exercice 1. Montrer que les courbes planes régulières de classe C^2 à courbure constante sont des arcs de cercle.

(On pourra considérer les paramétrisations par abscisse curviligne et montrer que le centre de courbure est constant.)

Exercice 2. Soient R et a deux nombres réels. On considère la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (R \cos t, R \sin t, at) \end{aligned}$$

1. Que représente géométriquement cette courbe ?
2. Déterminer une paramétrisation par abscisse curviligne.

3. Calculer le repère de Serret-Frenet.
4. Calculer la courbure κ_a de γ en tout point. Que remarquez-vous ?
5. Calculer la torsion τ_a de γ en tout point ? Que remarquez-vous ?
6. Calculer les limites

$$\lim_{a \rightarrow 0} \kappa_a \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \tau_a$$

Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

Exercice 3. On prend deux nombres réels $0 < r < R$. On considère le tore de révolution $f : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétré par

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}.$$

1. Représenter cette surface en 3D. Pourquoi, à votre avis, cette surface est-elle dite "de révolution" ?
2. Calculer l'aire de cette surface.
3. Que représentent géométriquement les courbes $\mathcal{C}_1 = \{f(0, v), v \in [0, 2\pi[\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{f(u, 0), u \in [0, 2\pi[\}$?
4. Montrer que les vecteurs tangents à ces courbes au point d'intersection $m = f(0, 0)$ sont orthogonaux.
5. Calculer en tout point m de la surface la deuxième forme fondamentale II_m , ainsi que les courbures et directions principales.
6. En tout point $m = f(u, v)$ de la surface, calculer le produit G_m des deux courbures principales.
 - Déterminer les points m pour lesquels $G_m > 0$
 - Déterminer les points m pour lesquels $G_m < 0$
 - Déterminer les points m pour lesquels $G_m = 0$
7. Interpréter géométriquement ces résultats.

2.5 Corrigé du devoir

Exercice 1. Prenons une courbe plane régulière de classe C^2 à courbure constante $\bar{\kappa}$ et considérons une paramétrisation $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ par abscisse curviligne. Par définition, le centre de courbure en $\gamma(t)$ est donné par :

$$C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\bar{\kappa}} \vec{N}(s).$$

En dérivant, on obtient

$$C'(s) = \gamma'(s) + \frac{1}{\bar{\kappa}} \vec{N}'(s).$$

Or les formules de Serret-Frenet indiquent que $\vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s)$, et donc

$$C'(t) = \vec{T}(s) - \vec{T}(s) = 0.$$

Le centre de courbure $C(s)$ est donc constant égal à C_0 . Donc pour tout $s \in I$

$$\|\gamma(s) - C_0\| = \left| \frac{1}{\kappa} \right| \|\vec{N}(s)\| = \frac{1}{\kappa}.$$

Le point $\gamma(s)$ appartient donc au cercle de centre C_0 et de rayon $1/\kappa$. Comme l'application γ est continue (et que I est un intervalle), le support géométrique est un arc de cercle.

Exercice 2.

1. Le support géométrique de cette courbe est une hélice (Figure 12).

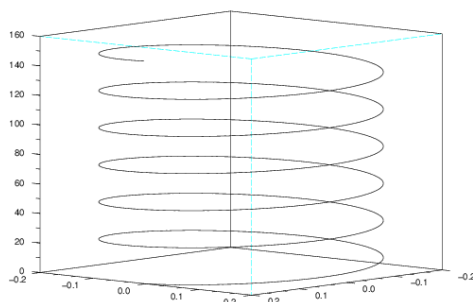


FIGURE 12 – Hélice

2. Il faut tout d'abord calculer une abscisse curviligne. On choisit le paramètre $t_0 = 0$ et on calcule la fonction $s_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$s_{t_0}(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{R^2 + a^2} du = \sqrt{R^2 + a^2} t.$$

Nous remarquons que l'application $s_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme. La paramétrisation par abscisse curviligne $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_{t_0}^{-1}$ est donc donnée par

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) = \begin{pmatrix} R \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ R \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ a \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} \end{pmatrix}.$$

3. Calculons le repère $(\tilde{\gamma}(s), \vec{T}(s), \vec{T}'(s))$ de Serret-Frenet en tout point de paramètre s . On a :

$$\vec{T}(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \begin{pmatrix} -R \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ R \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ a \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a :

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{1}{R^2 + a^2} \begin{pmatrix} -R \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ -R \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\gamma''(s)$ ne s'annule jamais et que tout point est birégulier.

$$\vec{N}(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \begin{pmatrix} a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ -a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ R \end{pmatrix}.$$

4. La courbure est donnée par :

$$\kappa_a(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \frac{R}{R^2 + a^2}.$$

On remarque que cette courbure est constante.

5. La torsion est donnée par la formule $\tau(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$. Or on a

$$\vec{B}'(s) = \frac{1}{R^2 + a^2} \begin{pmatrix} a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\tau_a(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s) = \frac{-a}{R^2 + a^2}.$$

En passant à la limite, on a :

- 6.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \kappa_a = \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \tau_a = 0$$

On observe que la courbe γ tend vers une paramétrisation du cercle quand a tend vers 0. On observe également que la courbure κ_a tend vers la courbure $\frac{1}{R}$ du cercle et que la torsion $\tau_a(s)$ tend vers la torsion du cercle qui vaut 0.

Exercice 3.

1. Cette surface est appelée surface de révolution, car elle est obtenue en faisant tourner un cercle de rayon r paramétré par

$$u \in [0, 2\pi[\mapsto (R + r \cos u, 0, r \sin u)$$

autour de l'axe $(0, 0, 1)$ (Voir Figure 13).

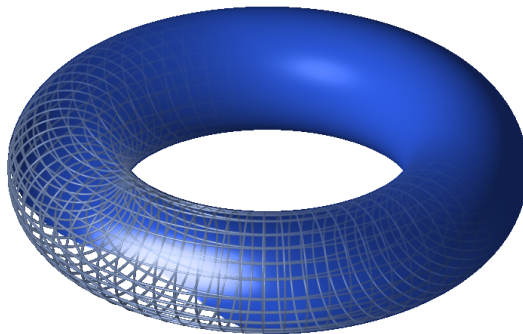


FIGURE 13 – Tore de révolution (image prise sur wikipedia)

2. L'aire de cette surface est donnée par

$$\text{Aire} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |r(R + r \cos u)| du dv = 4\pi^2 r R.$$

3. La courbe $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $(R + r)$. La courbe $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon r .
4. Les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectent au point $m = (R + r, 0, 0)$. Un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point m est donné par $\frac{\partial f}{\partial u}f(0, 0)$ et un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point m est donné par $\frac{\partial f}{\partial v}f(0, 0)$. Calculons ces dérivées partielles pour tout (u, v) :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que pour tout $(u, v) \in [0, 2\pi[\times (0, 2\pi[$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0.$$

On en déduit que ces deux vecteurs sont orthogonaux. En particulier, les vecteurs tangents aux deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au point d'intersection $m = f(0, 0)$ sont orthogonaux.

5. On note $K(u, v)$ le vecteur orthogonal à l'espace tangent $T_m S$ à la surface au point $m = f(u, v)$ donné par :

$$K(u, v) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

En reprenant les formules ci-dessus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = -r(R + r \cos u) \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

et donc on a :

$$K(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$L(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) \cdot K(u, v) = \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \\ -r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} = r.$$

$$M(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) \cdot K(u, v) = \begin{pmatrix} r \sin u \sin v \\ -r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} = 0.$$

$$N(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) \cdot K(u, v) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \cos v \\ -(R + r \cos u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} = (R + r \cos u) \cos u.$$

Comme $M(u, v) = 0$, cela signifie que la deuxième fondamentale $II(u, v)$ est diagonale dans la base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)$. Or cette base est orthogonale car les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont orthogonaux. Les deux directions principales sont donc

$$e_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\|} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales associées sont

$$\lambda_1 = \frac{L(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\|^2} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{N(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|^2} = \frac{\cos u}{R + r \cos u}.$$

6. La courbure de Gauss $G_m = G(u, v)$ est donnée par

$$G_m = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} G_m > 0 &\iff \cos u > 0 \iff u \in [0\pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[\\ G_m < 0 &\iff \cos u < 0 \iff u \in]\pi/2, 3\pi/2[\\ G_m > 0 &\iff \cos u = 0 \iff u \in \{-\pi/2, \pi/2\} \end{aligned}$$

L'ensemble des points où la courbure s'annule est l'union des deux cercles horizontaux de rayon R formés par les points d'altitude la plus haute $z = r$ et la plus basse $z = -r$. Cet ensemble s'écrit :

$$\left\{ \begin{pmatrix} R \cos v \\ R \sin v \\ r \end{pmatrix}, v \in [0, 2\pi[\right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} R \cos v \\ R \sin v \\ -r \end{pmatrix}, v \in [0, 2\pi[\right\}.$$

L'ensemble des point m où $G_m > 0$ est la partie "extérieure" de la surface bordée par ces deux cercles. En effet, on observe que le plan tangent en tout point de cette partie là est d'un même coté de la surface. L'ensemble des point m où $G_m < 0$ est la partie "intérieure" de la surface bordée par ces deux cercles. En effet, on observe que le plan tangent en tout point de cette partie là traverse la surface.

3 Compléments

3.1 Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétrées polynômiales qui ont été découvertes par l'ingénieur français Pierre Bézier (1910-1999) dans les années 60. Elles ont joué un rôle important dans le développement des logiciels de CAO, ont donné naissance à de nombreux objets mathématiques et sont encore utilisées dans des logiciels de dessin vectoriel. Pierre Bézier (pour plus de renseignements, on peut aussi regarder le site <http://rocbo.lautre.net/bezier/pb-indus.htm>) a travaillé chez Renault toute sa carrière. Une de ses préoccupation était de créer un moyen simple de modéliser des formes à partir de machines à commande numérique. L'idée lumineuse qu'il a eu consiste à exprimer une courbe comme combinaison linéaire de points (appelés *points de contrôles*). Ceci est bien illustré sur la Figure 14 : à gauche, on a des points (ordonnés) ; à droite, on a une courbe dont les extrémités sont deux points de cette courbe et qui est "attirée" par les autres points.

La définition de ces courbes est assez simple et utilise les polynômes de Bernstein. La courbe de Bézier associée à $n + 1$ points $P_0, \dots, P_n$ de $\mathbb{R}^2$ est la courbe paramétrée

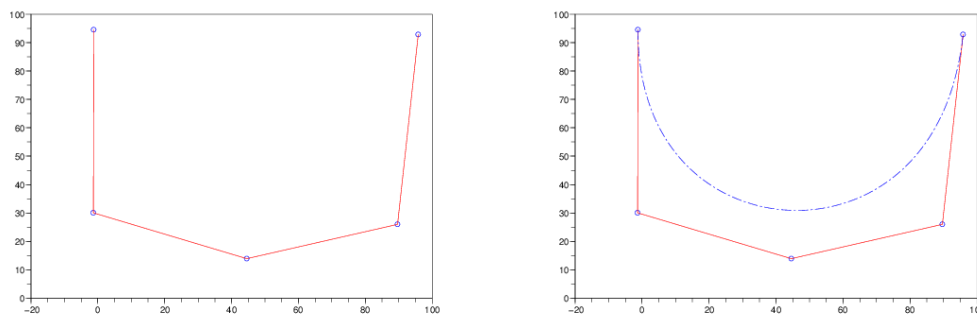


FIGURE 14 – Points de contrôles P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 (à gauche) et courbe de Bézier associée (à droite)

$P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

où B_i^n est le polynôme de Bernstein $B_i^n : t \mapsto C_i^n t^i (1-t)^{n-i}$. La courbe de Bézier a des propriétés assez sympathiques :

- Elle a pour extrémités les points P_0 et P_n ($P(0) = P_0$ et $P(1) = P_n$).
- Le vecteur $\overrightarrow{P_0 P_1}$ est tangent à la courbe de Bézier au point de paramètre $t = 0$.
- Le vecteur $\overrightarrow{P_{n-1} P_n}$ est tangent à la courbe de Bézier au point de paramètre $t = 1$.
- La courbe est "attirée" par les points $P_1, \dots, P_{n-1}$ (cette propriété est précisée ci-dessous).
- La courbe de Bézier ne dépend pas du repère choisi. Si on effectue une rotation des points de contrôles, la forme de la courbe de Bézier reste la même.

Les points $P_0, \dots, P_n$ sont appelés *points de contrôles* de la courbe de Bézier, ce qui est assez naturel. En effet, la courbe dépend de ces points. Quand on les bouge, on modifie la courbe qui est "attirée" par ces points. Plus précisément, chaque point $P(t_0)$ de la courbe de Bézier est combinaison linéaire des points de contrôles $P_0, \dots, P_n$:

$$P(t_0) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i, \quad \text{avec } \lambda_i = B_i^n(t_0).$$

En fait, les propriétés sympathiques des courbes de Bézier proviennent de propriétés sur les polynômes de Bernstein, comme par exemple celle de la partition de l'unité :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

On peut remarquer que cette propriété implique que le point $P(t_0)$ dans la formule ci-dessus est barycentre des points $P_0, \dots, P_n$.

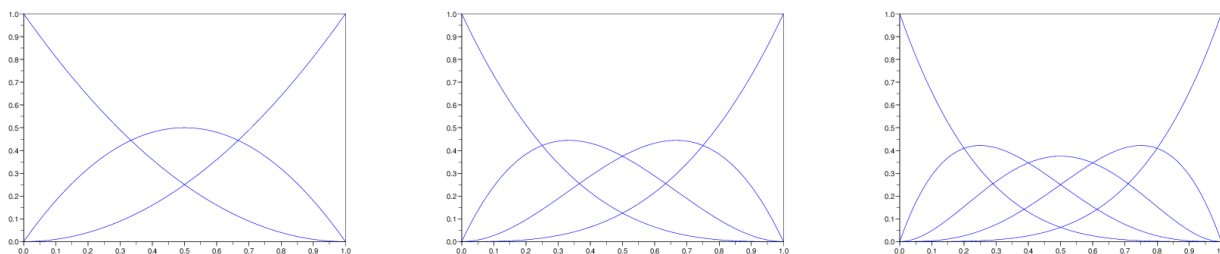


FIGURE 15 – Polynômes de Bernstein dans le cas $n = 2$ (à gauche), $n = 3$ (au milieu) et $n = 4$ (à droite)

Les courbes de Bézier forment un outil de base qui est utilisé pour définir d'autres notions utiles en modélisation. C'est le cas par exemple des courbes *B-splines*, beaucoup utilisées dans les logiciels de dessin, qui sont des courbes obtenues en mettant "bout à bout" des courbes de Bézier.

3.2 Theorema Egregium de Gauss

Le *theorema egregium*¹ est un important théorème de géométrie dû à Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui porte sur la courbure de Gauss des surfaces. Dans cette partie, on va essayer de comprendre ce que signifie ce théorème. On a vu dans la section 1.4 que la courbure de Gauss d'une surface en un point est le produit des deux courbures principales en ce point (Figure 16).

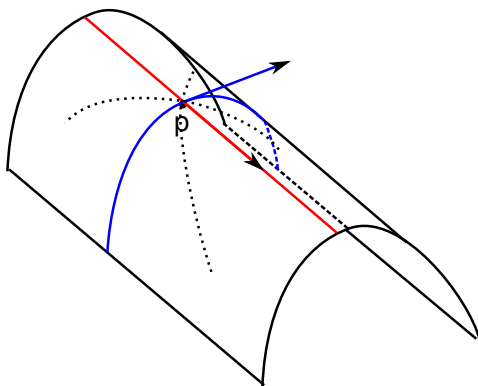


FIGURE 16 – La courbure de Gauss $G(p)$ au point p est le produit des deux courbures principales $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$ ($\lambda_1(p)$ est la courbure de la courbe bleue au point p et $\lambda_2(p)$ est la courbure de la courbe rouge au même point p).

Le *Theorema egregium* peut s'énoncer de la manière suivante :

1. Gauss a lui-même qualifié son résultat de "egregium", ce qui signifie "excellent".

Théorème 3. *La courbure de Gauss d'une surface est invariante par isométrie locale.*

Ce résultat nous indique que si on modifie une surface sans modifier ses longueurs, alors sa courbure de Gauss est inchangée. La courbure de Gauss est donc une courbure qui ne dépend pas de la forme de la surface, mais juste des distances mesurées sur cette surface.

Ce résultat est un résultat important de géométrie différentielle. On peut essayer de le comprendre au travers de l'exemple de l'hélicoïde et de la caténoïde. Une caténoïde et une hélicoïde sont représentées sur la Figure 17. Il est possible transformer la caténoïde en l'hélicoïde de manière continue et sans modifier les distance, comme illustré sur la Figure 18. Le théorème de Gauss implique alors que ces deux surfaces (qui sont isométriques) ont des courbures de Gauss identiques.

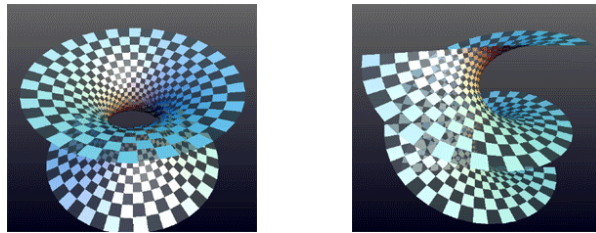


FIGURE 17 – Caténoïde (à gauche) et hélicoïde (à droite) (source <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Helicatenoid.gif>)

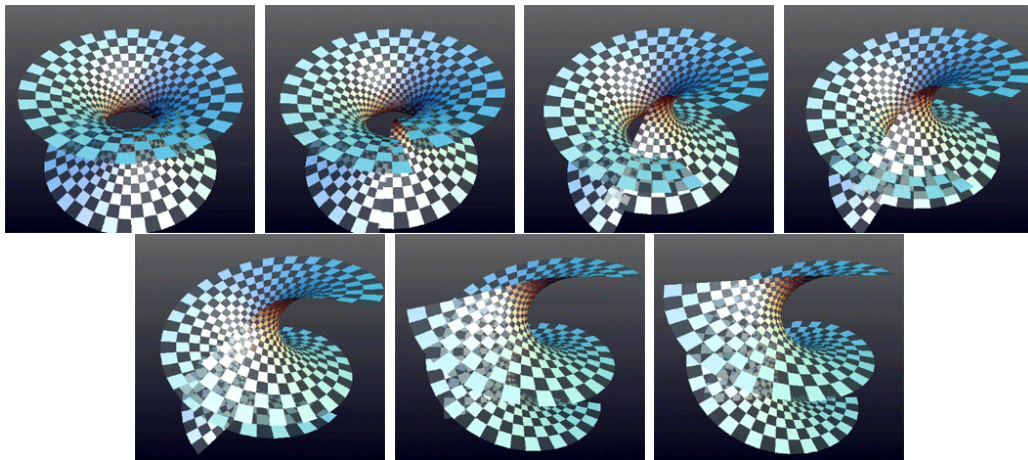


FIGURE 18 – De la caténoïde à l'hélicoïde : la transformation se fait en conservant les distances (source <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Helicatenoid.gif>)

3.3 Surfaces développables

Les surfaces développables sont des surfaces qui peuvent être "remises à plat" sans étirement ni déchirement. Ce type de surface intervient naturellement dans de nombreux domaines où la modélisation se fait justement avec des surfaces qui étaient planes et qui ont été déformées sans que leurs distances ne le soient. Citons plusieurs exemples :

- Une boule de papier froissée peut être modélisée par une surface qui était plane et qui a été déformée sans étirement ni déchirement.
- Certaines strates géologiques étaient planaires (c'est le cas si les sédiments se sont déposés sur une roche plane) et se sont déformées au cours du temps sans trop d'étirement ou de déchirement (cela peut être le cas si la roche est suffisamment dure). Elles peuvent être modélisées par des surfaces développables.
- Un vêtement est obtenu à partir d'un patron qui correspond justement à une surface planaire. Si l'on néglige l'élasticité du vêtement, il est encore naturel de le modéliser par une surface qui peut être remise à plat sans étirement ni déchirement, c'est à dire une surface développable.

La modélisation des surfaces développables est un problème compliqué, surtout si l'on n'impose pas à la surface d'être régulière de classe C^2 . Dans ce cas, le *theorem egregium* nous indique que la courbure de Gauss d'une surface développable est forcément nulle en tout point².

Prenons l'exemple du cône et du cylindre. Ces deux surfaces peuvent être obtenues en plissant une surface planaire sans étirement ni déchirement : ce sont donc des surfaces développables (Figure 19). Le *theorem egregium* de Gauss implique que leur courbure de Gauss est identiquement nulle. Effectivement, quand on fait directement le calcul de la courbure de Gauss, on trouve que celle-ci est identiquement nulle : cela provient du fait qu'une des courbures principales est nulle (celle qui correspond à la courbe rouge sur la Figure 19).

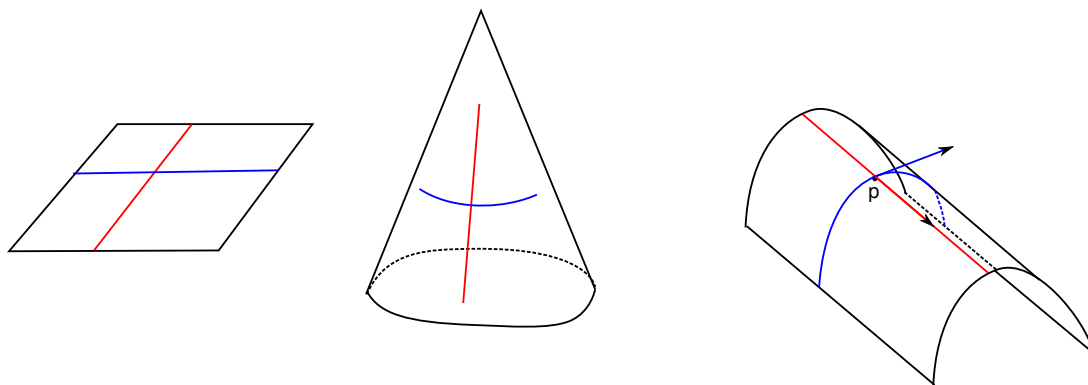


FIGURE 19 – Le plan, le cône et le cylindre sont des surfaces développables

2. En fait, en géométrie différentielle, la définition usuelle des surfaces développables est la suivante : une surface de classe C^2 est dite développable si sa courbure de Gauss est identiquement nulle

On remarque sur les exemples de la Figure 19 un fait surprenant : pour tout point p de la surface, il existe un segment de droite C_p qui contient p et qui est inclus dans la surface. Une surface qui vérifie cette propriété est dite réglée. Cette constatation est en fait générale : toute surface régulière de classe C^2 à courbure de Gauss nulle est réglée. Mais attention, la réciproque n'est pas vraie : il existe des surfaces réglées non développables (les exemples de la Figure 21 permettent de s'en convaincre).

On peut voir sur les Figures 22 et 23 des exemples de modélisation de surfaces basées sur les surfaces développables. Dans ces deux cas, la surface sous-jacente n'est pas régulière de classe C^2 . Un autre domaine où les surfaces développables sont utilisées est l'architecture. On peut par exemple citer le célèbre architecte Frank Gehry, qui les utilise dans la conception de ses bâtiments (Figure 24).

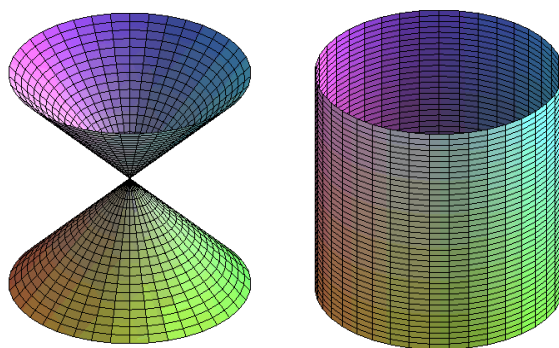


FIGURE 20 – Exemple de surfaces réglées et développables

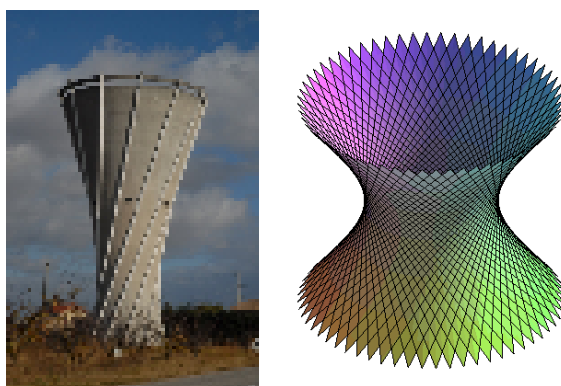


FIGURE 21 – Exemple de surfaces réglées non développables

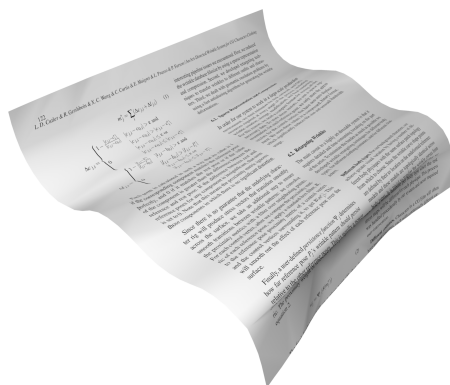


FIGURE 22 – Modélisation d'une feuille de papier (développable) un peu froissée à partir de son du bord

(SOURCE http://www-ljk.imag.fr/Publications/Basilic/com.lmc.publi.PUBLI_Inproceedings@1376f732f04_4b6ccc5c/RCHT_EG11.pdf)

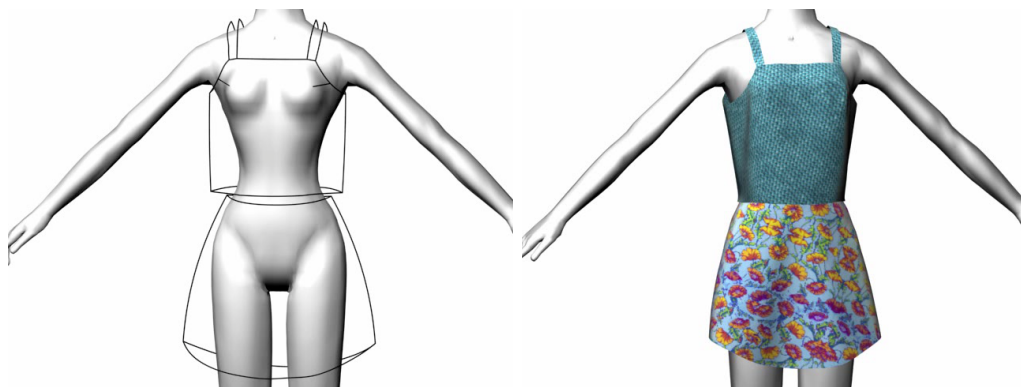


FIGURE 23 – Modélisation d'un vêtement (développable par morceaux) à partir de son bord (à gauche)

(SOURCE http://www-ljk.imag.fr/Publications/Basilic/com.lmc.publi.PUBLI_Inproceedings@117681e94b6_dffda2/garments.png)



FIGURE 24 – Musée Guggenheim de Bilbao. Ce bâtiment comporte des bouts de surfaces développables (source http://fr.wikipedia.org/wiki/Frank_Gehry)