

Coniques

Jean-Marc Decauwert

Les coniques ont été étudiées depuis l'antiquité. Ce sont, après les droites, les courbes planes les plus simples et les plus fréquemment rencontrées. D'abord apparues comme sections planes des cylindres et des cônes de révolution (d'où leur nom), elles sont maintenant surtout considérées, d'un point de vue mathématique, comme les courbes planes ayant une équation polynomiale du second degré. Elles jouissent de propriétés géométriques remarquables et interviennent dans de nombreux problèmes physiques, en particulier en cinématique (mouvement des planètes) et en optique géométrique (miroirs).

Table des matières

1 Cours	1
1.1 Définition par foyer et directrice	1
1.2 Définition bifocale des coniques à centre	5
1.3 Propriétés des tangentes	8
1.4 Ellipse et cercle	11
1.5 Hyperbole rapportée à ses asymptotes	15
1.6 Réduction des équations	17
2 Entraînement	23
2.1 Vrai ou faux	23
2.2 Exercices	26
2.3 QCM	31
2.4 Devoir	33
2.5 Corrigé du devoir	34
3 Compléments	40
3.1 Sections planes des cônes et des cylindres de révolution	40
3.2 Les théorèmes belges	41
3.3 Lois de Kepler	42
3.4 Optique géométrique	42
3.5 L'hexagramme mystique	44
3.6 Billards	46

1 Cours

Nous étudierons ici les coniques exclusivement du point de vue de la géométrie euclidienne. Tout ce chapitre a donc pour cadre un plan affine euclidien, rapporté, dans la plupart des cas, à un repère orthonormal (avec une exception en ce qui concerne l'hyperbole, dont l'équation est particulièrement simple dans un repère porté par ses asymptotes).

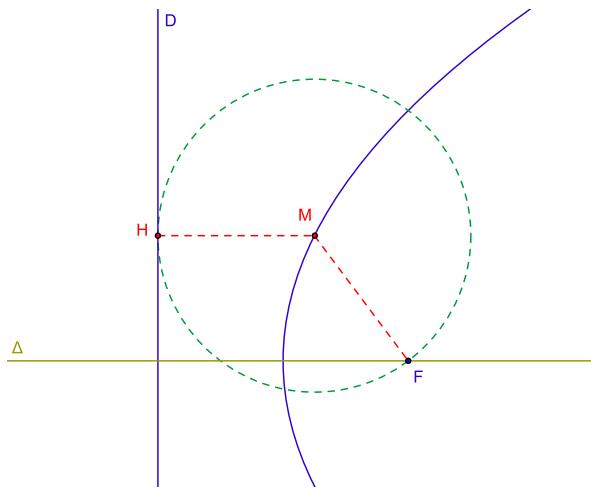
1.1 Définition par foyer et directrice

Définition 1. Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D , et $e > 0$ un réel. On appelle conique de directrice D , de foyer F et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan dont le rapport des distances à F et à D est égal à e , i.e. qui vérifient $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur D . Si $e < 1$, la conique est appelée ellipse, si $e = 1$ parabole, et si $e > 1$ hyperbole.

Proposition 1. La perpendiculaire Δ à la directrice D menée par le foyer F est axe de symétrie de la conique. Cette droite est appelée axe focal de la conique (focal = qui porte le foyer).

Démonstration : Soit M un point de la conique, s la symétrie orthogonale d'axe Δ , $M' = s(M)$. Le point F est fixe par s et la droite D globalement invariante par s . Une symétrie orthogonale conserve les distances et l'orthogonalité. Il en résulte que le projeté orthogonal de M' sur D est l'image $H' = s(H)$ du projeté orthogonal H de M sur D et que $M'F = MF$, $M'H' = MH$. Le point M' appartient donc à la conique. \square

Dans le cas particulier où $e = 1$, la parabole de directrice D et de foyer F est l'ensemble des points du plan équidistants de la droite D et du point F ; on peut aussi décrire cet ensemble comme le lieu des centres des cercles tangents à D passant par F .



Équations réduites

Nous allons chercher dans ce paragraphe un repère dans lequel l'équation de la conique soit la plus simple possible. Une telle équation sera appelée *équation réduite* de la conique.

La proposition 1 nous amène à travailler dans un repère orthonormal dont l'axe des x est l'axe focal. Soit donc (O, \vec{i}, \vec{j}) un tel repère, $(x_F, 0)$ les coordonnées de F , $x = x_D$ l'équation de D dans ce repère. L'équation $\frac{MF}{MH} = e$ équivaut à $MF^2 = e^2 MH^2$, soit encore :

$$(x - x_F)^2 + y^2 = e^2(x - x_D)^2.$$

Si $e = 1$, cette équation s'écrit encore :

$$2(x_F - x_D) \left(x - \frac{x_D + x_F}{2} \right) = y^2,$$

ce qui amène à poser $x_F = p/2$, $x_D = -x_F$. L'équation s'écrit alors $y^2 = 2px$. Le réel $p > 0$ est appelé *paramètre* de la parabole (c'est la distance du foyer à la directrice), l'origine O *sommet* de la parabole (c'est le seul point de la parabole situé sur l'axe focal).

Si $e \neq 1$, l'équation s'écrit :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2x(x_F - e^2x_D) + x_F^2 - e^2x_D^2 = 0.$$

On est alors amené à choisir l'origine O du repère de façon à avoir $x_F - e^2x_D = 0$, ce qui revient à dire que O est barycentre du système de points pondérés $[(F, 1), (K, -e^2)]$, où K est le point d'intersection de la directrice et de l'axe focal. Le point O est aussi le milieu du segment AA' , où A et A' sont les deux points de la conique situés sur l'axe focal (ces points sont les barycentres des systèmes pondérés $[(F, 1), (K, e)]$ et $[(F, 1), (K, -e)]$). Si on appelle a et $-a$ les abscisses de ces points, de sorte que $x_D = \frac{a}{e}$, $x_F = ae$, l'équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

On constate alors que l'axe Oy est axe de symétrie et le point O centre de symétrie de la conique. L'ellipse et l'hyperbole sont ainsi appelées *coniques à centre*, ce qui les distingue de la parabole, qui ne possède pas de centre de symétrie.

Une symétrie centrale étant une isométrie, on en déduit (démonstration analogue à celle de la proposition 1) pour ces coniques l'existence d'un second couple foyer-directrice (F', D') , symétrique du premier par rapport au point O (ou par rapport à l'axe Oy).

On est ensuite amené à séparer les cas $e < 1$ et $e > 1$:

- Si $e < 1$ (cas de l'ellipse), l'axe Oy coupe la conique en deux points B et B' , d'ordonnées $\pm a\sqrt{1 - e^2}$. On pose $b = a\sqrt{1 - e^2}$, de sorte que $0 < b < a$. L'équation de

l'ellipse s'écrit alors :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

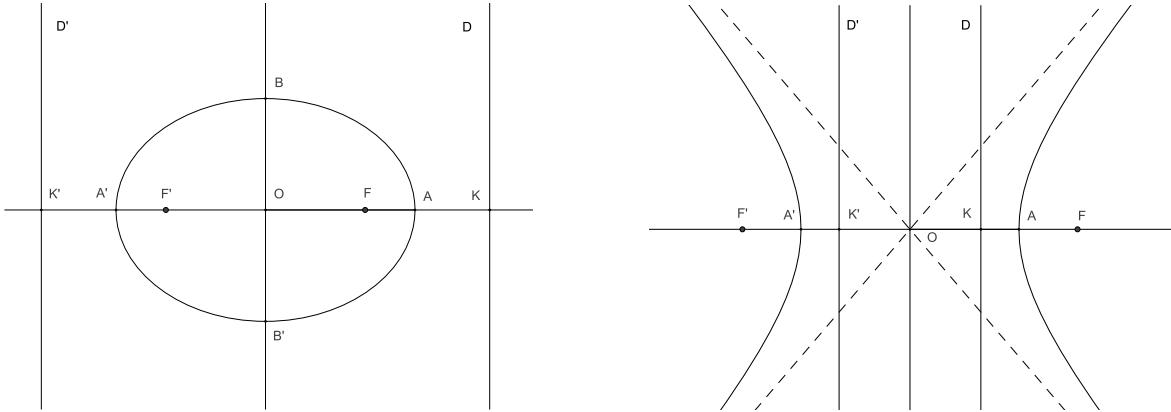
Le foyer F a pour coordonnées $(c, 0)$, où on a posé $c = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$, de sorte que $a^2 = b^2 + c^2$, et la directrice D pour équation $x = a^2/c$. Le foyer F' a pour coordonnées $(-c, 0)$ et la directrice associée D' pour équation $x = -a^2/c$. Les paramètres a , b , c représentent respectivement la moitié de la longueur AA' du *grand axe*, la moitié de la longueur BB' du *petit axe* et la demi-distance focale (distance FF' entre les deux foyers).

L'ellipse est une courbe bornée : elle est tout entière contenue dans le rectangle de sommets de coordonnées $(\pm a, \pm b)$ et est en particulier comprise entre ses deux directrices.

- Si $e > 1$ (cas de l'hyperbole), l'axe Oy ne coupe pas la conique. On pose $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. L'équation de l'hyperbole s'écrit alors :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On pose $c = ae = \sqrt{a^2 + b^2}$, de sorte que $c^2 = a^2 + b^2$. Le foyer F (resp. F') a alors pour coordonnées $(c, 0)$ (resp. $(-c, 0)$) et la directrice associée D (resp. D') pour équation $x = a^2/c$ (resp. $x = -a^2/c$). L'hyperbole possède deux *branches*, situées respectivement dans les demi-plans définis par les inéquations $x \geq a$ et $x \leq -a$. Ses directrices sont situées dans la bande séparant ces deux demi-plans.



Une parabole ou une ellipse sépare le plan en deux régions, définies par les inégalités $MF > eMH$ et $MF < eMH$. Une hyperbole sépare le plan en trois régions, dont deux correspondent à l'inégalité $MF < eMH$ et une (celle située en les deux branches) à l'inégalité $MF > eMH$.

Remarque : on peut considérer le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, de centre O et de rayon a , comme un cas limite d'ellipse, pour lequel $e = 0$, $b = a$, $c = 0$, les directrices étant repoussées à l'infini et les deux foyers confondus. Il n'est néanmoins pas possible de donner une définition du cercle par foyer et directrice dans le cadre du plan affine euclidien.

Représentation paramétrique

Parabole

La parabole d'équation $y^2 = 2px$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ellipse : L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi[)).$$

Hyperbole : L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

chaque choix de signe correspondant à la représentation paramétrique de l'une des deux branches.

Elle admet aussi la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases} \quad \left(t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\right),$$

chacun des intervalles de son domaine de définition correspondant à une branche.

Elle admet également la représentation paramétrique rationnelle :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \end{cases} \quad (u \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[),$$

chacun des intervalles de son domaine de définition correspondant à une branche.

On en déduit que l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. En effet, en utilisant par exemple la représentation paramétrique $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ de la branche de droite de l'hyperbole, on voit que, pour tout point (x, y) de l'hyperbole, $y - \frac{b}{a}x = b(\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) = -b e^{-t}$ tend vers 0

quand t tend vers $+\infty$ et $y + \frac{b}{a}x = b(\sinh t + \cosh t) = b e^t$ tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$.

Équation polaire d'une conique de foyer l'origine

Les lois de Kepler (voir section 3.3) disent que les trajectoires des planètes sont approximativement des ellipses dont le soleil occupe un des foyers. La démonstration de ce résultat fait intervenir l'équation polaire d'une conique dont un des foyers est situé à l'origine du repère. C'est ce qui fait l'importance de la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , D une droite d'équation normale $x \cos \varphi + y \sin \varphi = d$, où $d > 0$ est la distance de O à D . La conique d'excentricité e , de foyer O et de directrice D admet l'équation polaire :*

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}$$

où $p = ed$ est appelé paramètre de la conique.

Démonstration : La droite d'équation normale $x \cos \varphi + y \sin \varphi = d$ se déduit de la droite d'équation $x = d$ (qui correspond au cas $\varphi = 0$) par la rotation de centre O et d'angle φ . Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas où $\varphi = 0$, le cas général se déduit en remplaçant l'angle polaire θ d'un point M par $\theta - \varphi$ dans l'équation obtenue.

Les coordonnées cartésiennes de M sont alors $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ et celles du projeté orthogonal H de M sur D ($d, \rho \sin \theta$). La relation $MO^2 = e^2 MH^2$ s'écrit alors $\rho^2 = e^2(\rho \cos \theta - d)^2$, soit en développant :

$$(1 - e^2 \cos^2 \theta)\rho^2 + 2e^2 d \cos \theta \rho - e^2 d^2 = 0 .$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$\rho = \frac{ed(-e \cos \theta \pm 1)}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

si $e^2 \cos^2 \theta \neq 1$ (si $e \geq 1$, la ou les valeurs de θ telles que $e^2 \cos^2 \theta = 1$ correspondent aux directions asymptotiques de la parabole ou de l'hyperbole).

On trouve donc a priori deux courbes d'équations polaires $\rho_1(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ et $\rho_2(\theta) = \frac{-ed}{1 - e \cos \theta}$. Mais $\rho_2(\theta + \pi) = -\rho_1(\theta)$, ce qui signifie que le point d'angle polaire $\theta + \pi$ de la première courbe se confond avec le point de paramètre θ de la première. Il suffit donc de garder la première équation. \square

1.2 Définition bifocale des coniques à centre

L'existence de deux couples foyer-directrice pour les coniques à centre permet d'en obtenir une autre caractérisation. Si on appelle en effet F et F' les foyers, D et D' les

directrices correspondantes, H et H' les projetés d'un point M de la conique sur D et D' , on a les relations $MF = eMH$, $MF' = eMH'$.

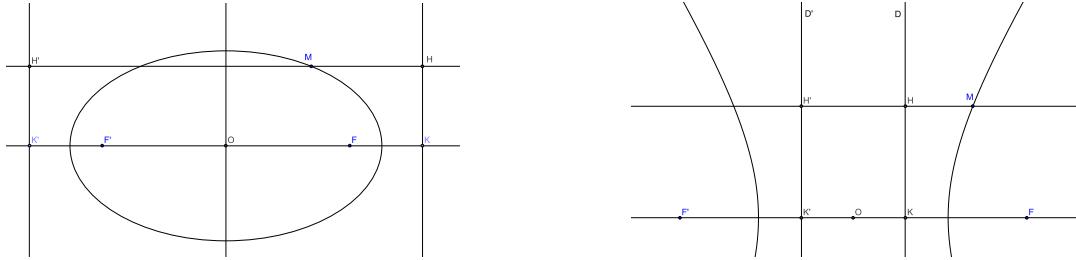
Cas de l'ellipse

L'ellipse est entièrement incluse dans la bande verticale délimitée par ses deux directrices ; il en résulte que tout point M de l'ellipse appartient au segment HH' , d'où $MF + MF' = e(MH + MH') = eHH' = e\frac{2a}{e} = 2a$. L'ellipse est donc incluse dans l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$.

Réiproquement, si un point M du plan de coordonnées (x, y) vérifie $MF + MF' = 2a$, on déduit de la relation

$$(MF - MF')(MF + MF') = MF^2 - MF'^2 = [(x - c)^2 + y^2] - [(x + c)^2 + y^2] = -4cx$$

que $MF - MF' = -2ex$, puisque $e = c/a$, d'où $MF = a - ex$, et $MF^2 = (x - c)^2 + y^2 = (a - ex)^2$, soit $x^2(1 - e^2) + y^2 = b^2$ puisque $ea = c$ et $a^2 - b^2 = c^2$, ou encore, en divisant par b^2 , $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ce qui montre que l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est inclus dans l'ellipse. L'ellipse est donc égale à cet ensemble.



Cas de l'hyperbole

L'hyperbole se compose au contraire de deux branches extérieures à la bande verticale délimitée par ses deux directrices. Il en résulte que pour tout point M de l'hyperbole, on a $|MF - MF'| = e|MH - MH'| = 2a$. L'une des branches de l'hyperbole est donc incluse dans l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF - MF' = 2a$ et l'autre dans l'ensemble des points M vérifiant $MF' - MF = 2a$. Un calcul identique à celui opéré dans le cas de l'ellipse permet ici encore de vérifier que l'hyperbole est exactement l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$.

En résumé :

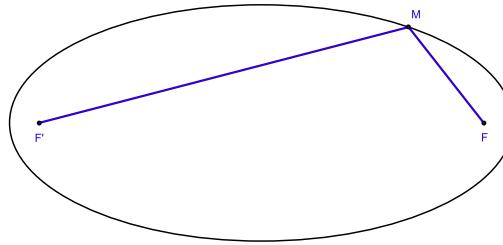
Proposition 3. Soient F et F' deux points distincts du plan et $c = FF'/2$ la demi-distance entre ces deux points.

1. Pour tout réel $a > c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ est l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$.
2. Pour tout réel positif $a < c$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F et F' et de grand axe $2a$.

Le cercle peut apparaître ici encore comme un cas particulier d'ellipse pour laquelle les deux foyers seraient confondus.

Application : construction de l'ellipse par le procédé dit du jardinier.

Pour tracer une ellipse de foyers F et F' et de longueur de grand axe $2a > FF'$ donnés, il suffit de fixer deux piquets en F et F' et d'y attacher les extrémités d'une ficelle non élastique de longueur $2a$. Le trajet que l'on parcourt en tournant autour de F et F' tout en maintenant la ficelle tendue est l'ellipse cherchée.



	Ellipse	Hyperbole
Équation réduite	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $0 < b < a$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Représentation paramétrique	$x = a \cos t$ $y = b \sin t$ $0 \leq t < 2\pi$	$x = \varepsilon a \operatorname{ch} t$ $y = b \operatorname{sh} t$ $\varepsilon \in \{-1, +1\}, t \in \mathbb{R}$
Distance focale	$FF' = 2c$ $a^2 = b^2 + c^2$	$FF' = 2c$ $c^2 = a^2 + b^2$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$
Longueur des axes	$AA' = 2a$ grand axe $BB' = 2b$ petit axe	$AA' = 2a$ axe focal
Définition bifocale	$MF + MF' = 2a$	$ MF - MF' = 2a$

TABLE 1 – Coniques à centre

1.3 Propriétés des tangentes

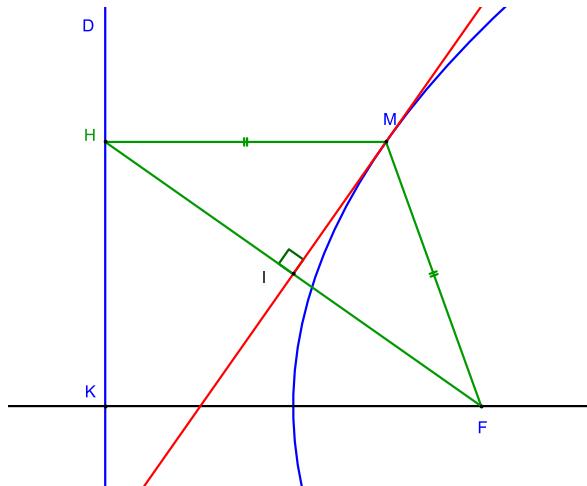
Rappels : dérivation vectorielle

Soit $t \mapsto \vec{u}(t)$ une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace vectoriel \vec{E} de dimension finie n . On dit que cette fonction est dérivable si toutes les coordonnées $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de $\vec{u}(t)$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de \vec{E} le sont (cette propriété ne dépend pas de la base). Le vecteur $x'_1(t)\vec{e}_1 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n$ est alors indépendant de la base. On le note $\vec{u}'(t)$.

On vérifie immédiatement que si deux fonctions $t \mapsto \vec{u}(t)$ et $t \mapsto \vec{v}(t)$ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace vectoriel euclidien \vec{E} sont dérivables, la fonction $t \mapsto \vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)$ de I dans \mathbb{R} est dérivable et que sa dérivée est $t \mapsto \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$. En particulier, la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|^2$ a pour dérivée $t \mapsto 2\vec{u}(t) \cdot \vec{u}'(t)$. On en déduit (dérivation d'une fonction composée) que la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t)\|$ est dérivable en tout point où elle ne s'annule pas et que sa dérivée en un tel point est égale à $\frac{\vec{u}(t)}{\|\vec{u}(t)\|} \cdot \vec{u}'(t)$.

Une fonction $t \mapsto M(t)$ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace affine E est dite dérivable s'il existe un point O de E tel que la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ de I dans \vec{E} soit dérivable. On note alors $\vec{M}'(t)$ sa dérivée (il résulte immédiatement de la relation de Chasles que ce vecteur ne dépend pas du point O). La courbe de représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$ admet alors en tout point de paramètre t où $\vec{M}'(t)$ ne s'annule pas une tangente de vecteur directeur $\vec{M}'(t)$.

Tangentes à la parabole

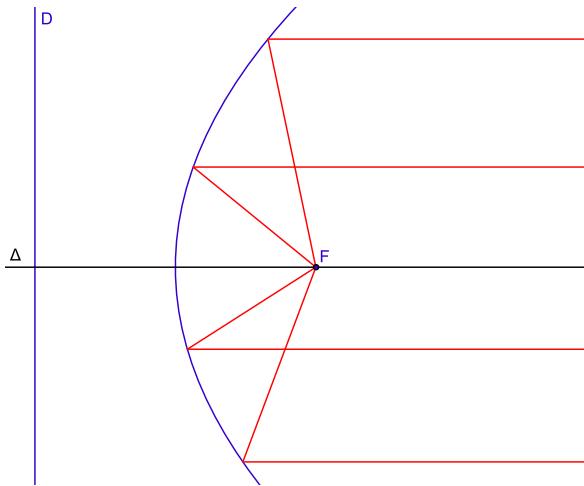


Soit $M = M(t)$ une représentation paramétrique de la parabole et $H = H(t)$ le projeté orthogonal de M sur la directrice D . En dérivant par rapport à t la relation $FM^2 - HM^2 = 0$, on obtient $2\overrightarrow{FM} \cdot \vec{M}' - 2\overrightarrow{HM} \cdot (\vec{M}' - \vec{H}') = 0$. Mais $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{H}' = 0$ puisque le vecteur \overrightarrow{HM} est orthogonal à D et le vecteur \vec{H}' appartient à la direction

de D . Il en résulte $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{M'} = (\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{M'} = 0$. La tangente en M à la parabole est donc orthogonale à la droite (FH) , i.e. est la hauteur issue de M dans le triangle MFH . Ce triangle étant isocèle en M , cette tangente est aussi la médiatrice de $[HF]$ et la bissectrice intérieure de l'angle en M de ce triangle.

Proposition 4. *La tangente en un point M à la parabole de foyer F et de directrice D est la médiatrice de $[HF]$, où H est le projeté orthogonal de M sur D . C'est aussi la bissectrice intérieure de l'angle en M dans le triangle isocèle HMF .*

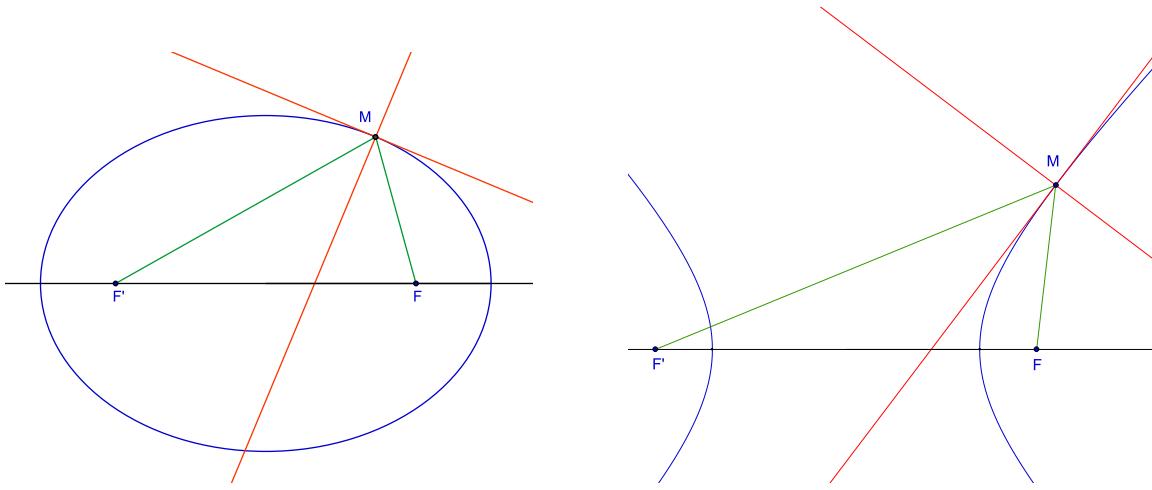
Il en résulte que tout rayon lumineux parallèle à l'axe d'un miroir parabolique se réfléchit en un rayon passant par le foyer : un miroir parabolique concentre donc la lumière au foyer. Cette propriété est utilisée dans certains télescopes et dans les fours solaires (voir section 3.4).



Tangentes aux coniques à centre

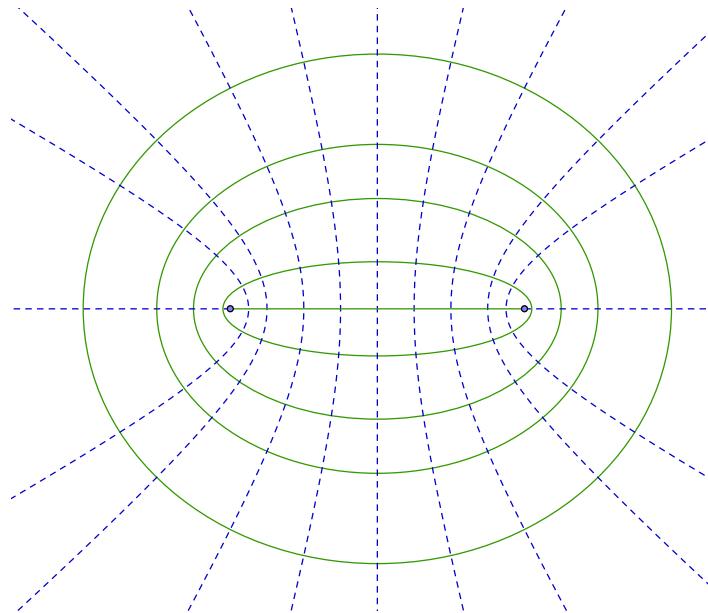
Soit Γ l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a . En dérivant la relation $FM + F'M = 2a$, on obtient de même : $\left(\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \right) \cdot \overrightarrow{M'} = 0$. Mais le vecteur $\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{FM}\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$ est somme de deux vecteurs directeurs unitaires des demi-droites $[MF]$ et $[MF']$; c'est donc un vecteur directeur de la bissectrice intérieure de l'angle en M du triangle MFF' . Il en résulte que la tangente en M à l'ellipse est orthogonale à cette bissectrice intérieure : c'est donc la bissectrice extérieure de l'angle en M de ce triangle.

Dans le cas de l'hyperbole, on montre de même, en dérivant la relation $FM - F'M = \pm 2a$ (chaque choix de signe correspondant à une branche de l'hyperbole), que la tangente en M est la bissectrice intérieure de l'angle en M du triangle MFF' .



Ellipses et hyperboles homofocales

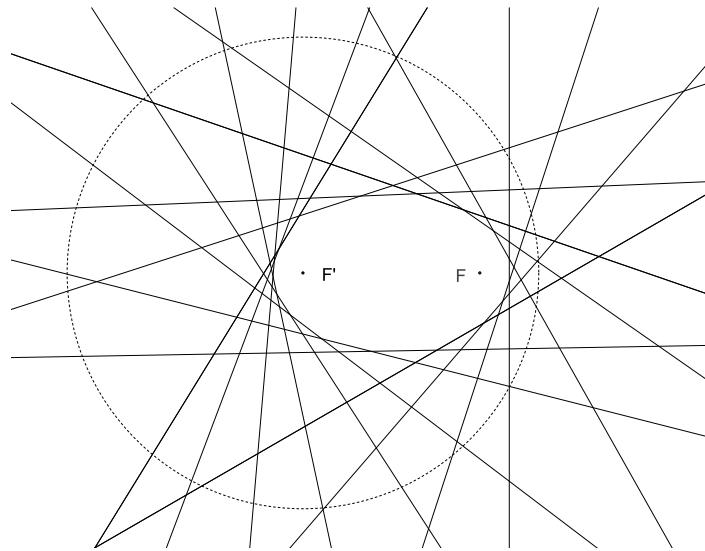
Les ellipses (resp. les hyperboles) de foyers F et F' fixés sont les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto MF + MF'$ (resp. $M \mapsto |MF - MF'|$). Par tout point du plan n'appartenant pas au segment $[FF']$ (resp. à la médiatrice de $[FF']$ ou à la droite (FF') privée du segment $[FF']$) passe donc une et une seule ellipse (resp. hyperbole) de foyers F et F' . Il résulte de la démonstration précédente que ces deux coniques se coupent à angle droit, puisque les deux bissectrices en M du triangle MFF' sont perpendiculaires (les gradients des deux fonctions considérées sont en tout point orthogonaux). Les ellipses et les hyperboles de foyers fixés constituent donc deux familles de courbes orthogonales.



Génération tangentielle des coniques

Soit D une droite du plan et F un point du plan n'appartenant pas à D . L'ensemble des médiatrices des segments HF , quand H parcourt D est alors l'ensemble des tangentes à la parabole de foyer F et de directrice D . On dit que la parabole est l'*enveloppe* de cette famille de droites.

De même, si F et F' sont deux points distincts du plan et C le cercle de centre F' et de rayon $2a$, où a est un réel vérifiant $FF' < 2a$, l'ensemble des médiatrices des segments HF , quand H parcourt C est l'ensemble des tangentes à l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$. L'ellipse est donc l'enveloppe de cette famille de droites. Le cas de l'hyperbole est analogue (avec cette fois $FF' > 2a$).



1.4 Ellipse et cercle

Rappels : affinité orthogonale

Définition 2. Soit D une droite du plan et λ un réel non nul. On appelle *affinité orthogonale de base D et de rapport λ* l'*application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' défini par $\overrightarrow{mM'} = \lambda \overrightarrow{mM}$, où m est le projeté orthogonal du point M sur la droite D .*

Si on rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que le point O appartienne à D et que \vec{i} soit un vecteur directeur de D , les coordonnées du point M' sont données par $x' = x$, $y' = \lambda y$, où (x, y) sont les coordonnées de M .

Une affinité orthogonale est une transformation affine. Elle conserve donc l'alignement, les milieux, le contact (ce qui signifie qu'elle transforme la tangente à une courbe

en la tangente à la courbe image), et multiplie les aires par la valeur absolue du déterminant de sa partie linéaire, qui est ici le rapport de l'affinité. Elle laisse par ailleurs fixe tout point de sa base D .

Proposition 5. *L'ellipse de représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) est l'image du cercle de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale de base Ox et de rapport b/a . Ce cercle est appelé cercle principal de l'ellipse.*

Elle est aussi l'image du cercle de centre O et de rayon b par l'affinité orthogonale de base Oy et de rapport a/b . Ce cercle est appelé cercle secondaire de l'ellipse.

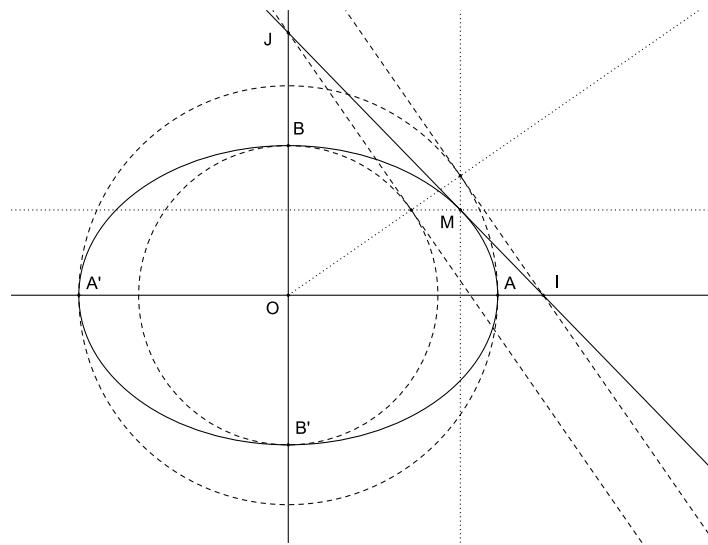
Démonstration : Il suffit d'utiliser la représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ (resp. $x = b \cos t$, $y = b \sin t$) du cercle principal (resp. secondaire) de l'ellipse. \square

Cette propriété permet de déduire un certain nombre de propriétés de l'ellipse de propriétés analogues pour le cercle.

Construction de l'ellipse par points et par tangentes

Pour construire à la règle et au compas un point M de l'ellipse connaissant ses axes et ses cercles principal et secondaire, il suffit de tracer une demi-droite Δ d'origine le centre O de l'ellipse ; soit M_1 le point d'intersection de Δ avec le cercle principal, M_2 le point d'intersection de Δ avec le cercle secondaire ; la parallèle au grand axe menée par M_2 et la parallèle au petit axe menée par M_1 se coupent un point M de l'ellipse. Le paramètre t de ce point dans la représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ est une mesure de l'angle (Ox, Δ) et est appelé *anomalie excentrique* du point M .

Pour construire la tangente en M à l'ellipse, il suffit de tracer la tangente au cercle principal en M_1 ; si elle coupe le grand axe en I , la droite (MI) est tangente à l'ellipse en M . On peut aussi construire le point d'intersection J de la tangente en M_2 au cercle secondaire avec le petit axe ; les trois points M , I , J sont alors alignés sur cette tangente.



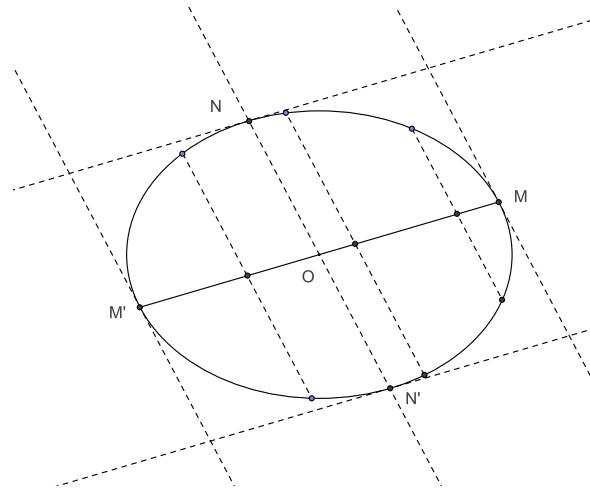
Diamètres conjugués

On appelle *corde* d'une conique Γ tout segment joignant deux points de Γ et *diamètre* d'une conique à centre toute corde passant par le centre de cette conique.

Proposition 6. Soit E une ellipse et D une droite.

1. L'ensemble des milieux des cordes de E parallèles à D est le diamètre $[MM']$ de E ayant pour extrémités les deux points M et M' de E en lesquels la tangente à E est parallèle à D .
2. L'ensemble des milieux des cordes de E parallèles à (MM') est le diamètre $[NN']$ de E parallèle à D .

Les diamètres $[MM']$ et $[NN']$ de E sont dits conjugués.



Démonstration : Le parallélisme et les milieux sont conservés par toute affinité orthogonale. Il suffit donc de prendre l'image de E par l'affinité orthogonale de base le grand axe qui transforme E en son cercle principal C et de démontrer la propriété pour C . Mais la propriété est évidente dans le cas d'un cercle, puisque l'ensemble des milieux des cordes d'un cercle parallèles à une droite donnée est le diamètre du cercle orthogonal à cette droite. \square

On remarquera que deux diamètres conjugués d'une ellipse ne sont en général pas orthogonaux : en effet une affinité orthogonale ne conserve pas l'orthogonalité.

Aire de l'ellipse

Proposition 7. L'aire intérieure à une ellipse de demi-axes a et b est égale à πab .

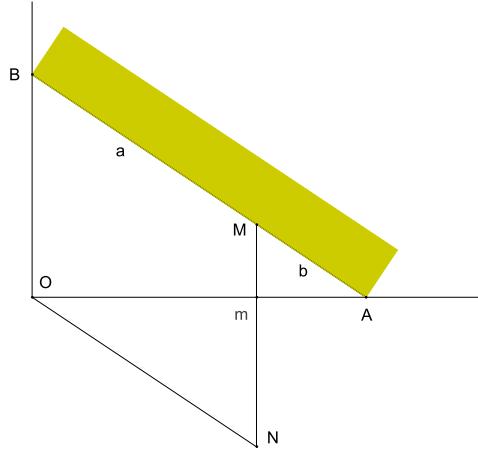
Démonstration : Une affinité orthogonale de rapport $k > 0$ multiplie les aires par k . L'aire intérieure à l'ellipse est donc $\frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab$. \square

Remarque : il n'existe pas de formule simple pour la longueur de l'ellipse.

Construction de l'ellipse par le procédé dit de la bande de papier

Sur un segment AB de longueur $a + b$ ($0 < b < a$), on place un point M tel que $AM = b$ (et donc $BM = a$). Quand A et B se déplacent respectivement sur deux axes orthogonaux Ox et Oy , le point M décrit un quart d'ellipse.

Démonstration : Soit N tel que le quadrilatère $OBMN$ soit un parallélogramme et m l'intersection de (MN) et Ox (i.e. le projeté orthogonal de M sur Ox). Les triangles rectangles mMA et mNO étant semblables, le point M se déduit du point N par l'affinité orthogonale de base Ox et de rapport $-\frac{b}{a}$. Mais le point N décrit un quart de cercle de centre O et de rayon a . \square



Projection orthogonale d'un cercle sur un plan

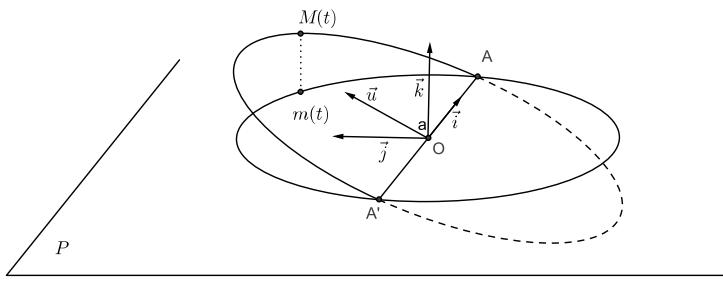
Proposition 8. *Le projeté orthogonal d'un cercle C de rayon R de l'espace sur un plan P est :*

- un cercle de rayon R si le plan P est parallèle au plan de C ;
- un segment de longueur $2R$ si le plan P est perpendiculaire au plan de C ;
- une ellipse de demi-grand axe R et de demi-petit axe $R \cos \theta$, où θ est l'angle du plan P avec le plan de C si ce plan n'est ni parallèle ni perpendiculaire à P .

Démonstration : Si deux plans sont parallèles, le projeté orthogonal d'une figure sur l'un se déduit du projeté orthogonal de cette figure sur l'autre par une translation. Quitte à compléter par une translation, on peut donc supposer que le plan P passe par le centre O de C .

Soit Q le plan de C . Le cas où P et Q sont parallèles est immédiat. Supposons donc P et Q sécants. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace tel que \vec{i} soit un vecteur directeur de la droite D d'intersection de P et Q et \vec{j} un vecteur de P . Soit \vec{u} un vecteur unitaire de Q orthogonal à \vec{i} ; (O, \vec{i}, \vec{u}) est alors un repère orthonormé de Q . Le cercle C admet dans ce repère la représentation paramétrique $\overrightarrow{OM}(t) =$

$R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{u}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Les composantes du vecteur \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont (quitte à changer le sens de \vec{j} et \vec{k}) $(0, \cos \theta, \sin \theta)$. Il en résulte que $M(t)$ a pour coordonnées $(R \cos t, R \sin t \cos \theta, R \sin t \sin \theta)$ et son projeté orthogonal $m(t)$ sur P pour coordonnées $(R \cos t, R \sin t \cos \theta, 0)$. Si P et Q sont perpendiculaires, $\cos \theta = 0$ et $m(t)$ parcourt un segment de longueur $2R$. Si $\cos \theta \neq 0$, on reconnaît la représentation paramétrique d'une ellipse dont le grand axe est le diamètre de C porté par D et le petit axe a pour longueur $2R \cos \theta$. \square



1.5 Hyperbole rapportée à ses asymptotes

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ admet comme asymptotes les droites d'équations $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Son équation s'écrit encore

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 1,$$

soit, en posant $X = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$:

$$XY = 1.$$

Mais les relations

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

montrent que X et Y sont les coordonnées dans le repère (non orthonormé) $\mathcal{R}' = (O, \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}, \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j})$ du point de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} . L'équation $XY = 1$ est donc celle de l'hyperbole dans ce repère \mathcal{R}' porté par les asymptotes.

Proposition 9. *Pour toute hyperbole H , il existe un repère cartésien porté par les asymptotes de H dans lequel l'équation de H est $XY = 1$.*

Plus généralement, une hyperbole admet, dans tout repère cartésien porté par ses asymptotes, une équation de la forme $XY = k$, pour un réel k non nul.

Un tel repère n'est en général pas orthogonal. Il l'est si et seulement si l'hyperbole est équilatère.

Définition 3. *Une hyperbole est dite équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires.*

Proposition 10. *Une hyperbole est équilatère si et seulement si son excentricité est égale à $\sqrt{2}$.*

Démonstration : Les asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal admettent comme vecteurs directeurs les vecteurs $(a, -b)$ et (a, b) . Ces vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $a^2 = b^2$, ou encore $c^2 = 2a^2$, puisque la demi-distance focale c vérifie $c^2 = a^2 + b^2$. Mais l'excentricité e est égale à c/a . \square

Intersection de l'hyperbole et d'une droite

En utilisant l'équation de l'hyperbole dans un repère porté par les asymptotes, on vérifie immédiatement que toute droite parallèle à l'une des asymptotes (et distincte de cette asymptote) coupe l'hyperbole en exactement un point. Une telle droite admet en effet dans ce repère une équation de la forme $x = x_0$ ou $y = y_0$, où x_0 (resp. y_0) est un réel non nul.

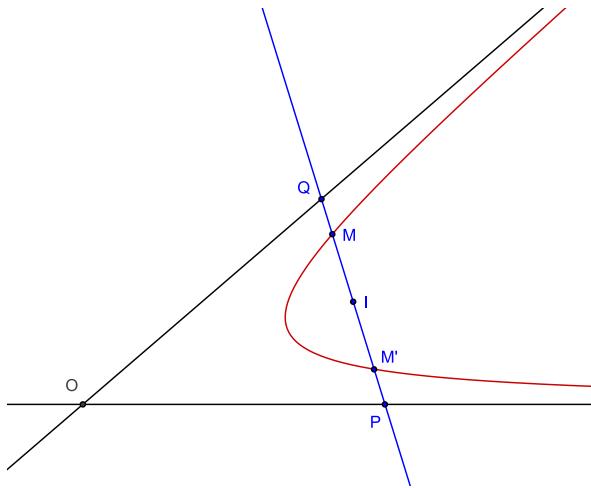
Proposition 11. *Si une droite D non parallèle aux asymptotes coupe l'hyperbole en deux points M et N (distincts ou confondus) et les asymptotes en deux points P et Q , les segments $[MN]$ et $[PQ]$ ont même milieu.*

Démonstration : Rapportons le plan à un repère (en général non orthonormé) porté par les asymptotes dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$. Une droite D non parallèle aux asymptotes a une équation de la forme $ux + vy + w = 0$, avec $uv \neq 0$. Un point de coordonnées (x, y) appartient à l'hyperbole et à D si et seulement si $y = 1/x$ et $ux^2 + wx + v = 0$. La droite D coupe donc l'hyperbole en deux points distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) si le discriminant $w^2 - 4uv$ de cette équation du second degré est strictement positif et un point double s'il est nul. Dans le cas où D coupe l'hyperbole en deux points distincts ou confondus M et N , le milieu du segment $[MN]$ a pour abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{w}{2u}$. Les points P et Q d'intersection de D avec les axes

ont pour coordonnées $(-\frac{w}{u}, 0)$ et $(0, -\frac{w}{v})$. Les milieux des segments $[MN]$ et $[PQ]$ ont donc même abscisse et sont donc confondus, puisqu'ils appartiennent tous deux à D . \square

Construction de l'hyperbole point par point

On en déduit une construction point par point d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point : si M est le point donné, on mène par M une droite coupant les asymptotes en P et Q , le symétrique M' de M par rapport au milieu I du segment $[PQ]$ appartient alors à l'hyperbole. On peut ainsi construire à la règle et au compas autant de points de l'hyperbole qu'on le souhaite.



1.6 Réduction des équations

On a vu à la section 1.1 que toute conique admettait, dans un certain repère orthonormal, une équation polynomiale du second degré. Cette propriété ne dépend en fait pas du repère : si une courbe admet, dans un certain repère cartésien du plan (non nécessairement orthonormé) une équation du second degré, alors elle admet, dans tout repère cartésien du plan, orthonormé ou pas, une équation du second degré.

Soit en effet $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, avec a, b, c non tous nuls, l'équation d'une telle courbe Γ dans un certain repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ un autre repère cartésien du plan. Notons X (resp. X') le vecteur colonne des coordonnées (x, y) (resp. (x', y')) d'un point M dans le repère \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'), A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, B le vecteur colonne de composantes (d, e) , P la matrice de passage de la base (\vec{i}, \vec{j}) à la base (\vec{i}', \vec{j}') et C le vecteur colonne des coordonnées de O' dans le repère \mathcal{R} .

L'équation de Γ dans le repère \mathcal{R} s'écrit alors ${}^t X A X + 2 {}^t B X + f = 0$. Mais les coordonnées de M dans le repère \mathcal{R}' sont données par $X = P X' + C$. Il en résulte que

l'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' s'écrit ${}^t(PX' + C)A(PX' + C) + 2 {}^tB(PX' + C) + f = 0$, soit encore ${}^tX'A'X' + 2 {}^tB'X' + f' = 0$, où $A' = {}^tPAP$, $B' = {}^tP(B + AC)$, $f' = f + {}^tCAC + 2 {}^tBC$. Cette équation est encore polynomiale du second degré en x', y' .

Le but de cette section est de montrer que, réciproquement, toute courbe plane admettant une équation du second degré est une conique (éventuellement dégénérée) et de ramener son équation, par un changement de repère approprié, à une des formes canoniques obtenues à la section 1.1.

On considère donc dans toute cette section une courbe plane Γ (éventuellement vide ou réduite à un point) admettant, dans un certain repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une équation du second degré, de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f sont 6 réels quelconques, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

En introduisant comme précédemment la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation de Γ dans le repère \mathcal{R} s'écrit

$${}^tXAX + 2 {}^tBX + f = 0.$$

La matrice A étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ (où λ et μ sont les valeurs propres de A) telles que

$A = PDP^{-1} = PD {}^tP$, d'où $D = {}^tPAP$. La matrice P est la matrice de passage de la base (\vec{i}, \vec{j}) à une base orthonormée (\vec{i}', \vec{j}') , où les vecteurs \vec{i}' et \vec{j}' ont pour composantes dans la base (\vec{i}, \vec{j}) les vecteurs colonnes de la matrice P . Notons (x', y') les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ du point de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. L'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' s'écrit donc

$${}^tX'DX' + 2 {}^tB'X' + f = 0,$$

soit encore

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0,$$

où $B' = \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = {}^tPB$. Les matrices A et D étant semblables, on a

$$ac - b^2 = \det(A) = \det(D) = \lambda\mu.$$

Premier cas : $ac - b^2 > 0$.

Dans ce cas, λ et μ sont de même signe ; on peut donc, quitte à multiplier l'équation par -1, les supposer tous deux positifs et poser $\lambda = \alpha^2$, $\mu = \beta^2$ pour des réels positifs α et β . L'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' s'écrit alors

$$\alpha^2 \left(x' + \frac{d'}{\alpha^2} \right)^2 + \beta^2 \left(y' + \frac{e'}{\beta^2} \right)^2 + f' = 0 ,$$

où $f' = f - \frac{d'^2}{\alpha^2} - \frac{e'^2}{\beta^2}$.

Soit O' le point de coordonnées $\left(-\frac{d'}{\alpha^2}, -\frac{e'}{\beta^2} \right)$ dans le repère \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' le repère (O', \vec{i}', \vec{j}') et (x'', y'') les coordonnées dans \mathcal{R}'' d'un point de coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' , de sorte que $x'' = x' + \frac{d'}{\alpha^2}$, $y'' = y' + \frac{e'}{\beta^2}$. L'équation de Γ dans \mathcal{R}'' s'écrit donc

$$\alpha^2 x''^2 + \beta^2 y''^2 + f' = 0 .$$

Trois cas se présentent :

- si $f' > 0$, Γ est vide ;
- si $f' = 0$, Γ est réduite au point O' ;
- si $f' < 0$, l'équation de Γ s'écrit, en posant $a' = \frac{\sqrt{-f'}}{\alpha}$, $b' = \frac{\sqrt{-f'}}{\beta}$, sous la forme

$$\frac{x''^2}{a'^2} + \frac{y''^2}{b'^2} = 1 .$$

On reconnaît :

- si $a' > b'$, une ellipse de grand axe l'axe $O'x''$;
- si $b' > a'$, une ellipse de grand axe l'axe $O'y''$;
- si $a' = b'$, un cercle de centre O' .

On dit, dans tous ces cas, que Γ est *du genre ellipse*.

Deuxième cas : $ac - b^2 < 0$.

Les deux réels λ et μ sont de signes contraires ; on peut donc, quitte à multiplier l'équation par -1, supposer $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ et poser $\lambda = \alpha^2$, $\mu = -\beta^2$ pour des réels positifs α et β . L'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' s'écrit alors

$$\alpha^2 \left(x' + \frac{d'}{\alpha^2} \right)^2 - \beta^2 \left(y' - \frac{e'}{\beta^2} \right)^2 + f' = 0 ,$$

où $f' = f - \frac{d'^2}{\alpha^2} + \frac{e'^2}{\beta^2}$.

Soit O' le point de coordonnées $\left(-\frac{d'}{\alpha^2}, \frac{e'}{\beta^2}\right)$ dans le repère \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' le repère (O', \vec{i}', \vec{j}') et (x'', y'') les coordonnées dans \mathcal{R}'' d'un point de coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' , de sorte que $x'' = x' + \frac{d'}{\alpha^2}$, $y'' = y' - \frac{e'}{\beta^2}$. L'équation de Γ dans \mathcal{R}'' s'écrit donc

$$\alpha^2 x''^2 - \beta^2 y''^2 + f' = 0.$$

Trois cas se présentent :

- si $f' = 0$ l'équation s'écrit sous la forme $\alpha^2 x''^2 - \beta^2 y''^2 = 0$, soit encore $(\alpha x'' - \beta y'')(\alpha x'' + \beta y'') = 0$: Γ est donc réunion des deux droites sécantes en O' d'équations $\alpha x'' - \beta y'' = 0$ et $\alpha x'' + \beta y'' = 0$;
- si $f' < 0$, l'équation de Γ s'écrit, en posant $a' = \frac{\sqrt{-f'}}{\alpha}$, $b' = \frac{\sqrt{-f'}}{\beta}$, sous la forme

$$\frac{x''^2}{a'^2} - \frac{y''^2}{b'^2} = 1;$$

Γ est donc une hyperbole d'axe focal $O'x''$;

- si $f' > 0$, l'équation de Γ s'écrit, en posant $a' = \frac{\sqrt{f'}}{\alpha}$, $b' = \frac{\sqrt{f'}}{\beta}$, sous la forme

$$-\frac{x''^2}{a'^2} + \frac{y''^2}{b'^2} = 1;$$

Γ est donc une hyperbole d'axe focal $O'y''$.

On dit, dans tous ces cas, que Γ est *du genre hyperbole*.

Troisième cas : $ac - b^2 = 0$.

On a alors $\lambda\mu = 0$, mais un seul des deux nombres λ et μ est nul, sinon la matrice A serait nulle et l'équation de Γ ne serait plus du second degré. On peut donc supposer $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. L'équation de Γ dans le repère \mathcal{R}' s'écrit $\mu y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f = 0$, soit encore

$$\left(y' + \frac{e'}{\mu}\right)^2 + 2d''x' + f' = 0$$

en posant $d'' = \frac{d'}{\mu}$, $f' = \frac{f}{\mu} - \frac{e'^2}{\mu^2}$.

Quatre cas se présentent :

- si $d'' = 0$ et $f' > 0$, Γ est vide ;
- si $d'' = 0$ et $f' = 0$, l'équation de Γ s'écrit $\left(y' + \frac{e'}{\mu}\right)^2 = 0$; Γ est donc une droite double ;
- si $d'' = 0$ et $f' < 0$, Γ est réunion des deux droites parallèles d'équations $y' + \frac{e'}{\mu} = \pm\sqrt{-f'}$;

- si $d'' \neq 0$, soit O' le point de coordonnées $\left(-\frac{f'}{2d''}, -\frac{e'}{\mu}\right)$ dans le repère \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' le repère (O', \vec{i}', \vec{j}') et (x'', y'') les coordonnées dans \mathcal{R}'' d'un point de coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' , de sorte que $x'' = x' + \frac{f'}{2d''}$, $y'' = y' + \frac{e'}{\mu}$; l'équation de Γ dans \mathcal{R}'' s'écrit $y''^2 + 2d''x'' = 0$; Γ est donc une parabole d'axe focal $O'x''$.

On dit, dans tous ces cas, que Γ est *du genre parabole*.

En résumé, on voit que toute courbe admettant une équation polynomiale du second degré est soit une conique ou un cercle, soit vide ou réduite à un point, soit réunion de deux droites, éventuellement confondues. Dans ce dernier cas, l'équation de Γ se décompose en produit de deux équations du premier degré : on dit que la conique est *dégénérée*.

$ac - b^2$	Genre	Nature
> 0	Ellipse	<ul style="list-style-type: none"> - Ellipse - Cercle - Point - Ensemble vide
< 0	Hyperbole	<ul style="list-style-type: none"> - Hyperbole - Deux droites sécantes
$= 0$	Parabole	<ul style="list-style-type: none"> - Parabole - Deux droites parallèles - Une droite double - Ensemble vide

TABLE 2 – Réduction des équations

Recherche d'un centre

En pratique, il est souvent intéressant de commencer par chercher si la conique possède un centre de symétrie et de déterminer, s'il existe, ce centre. Un point O' , de coordonnées (x_0, y_0) dans \mathcal{R} , est centre de symétrie de Γ si et seulement si l'équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ ne comporte pas de termes du premier degré. Les coordonnées (x', y') dans \mathcal{R}' du point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} sont données par $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. L'équation de Γ dans \mathcal{R}' s'écrit donc :

$$a(x' + x_0)^2 + 2b(x' + x_0)(y' + y_0) + c(y' + y_0)^2 + 2d(x' + x_0) + 2e(y' + y_0) + f = 0.$$

Cette équation ne comporte pas de termes du premier degré si et seulement si :

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0. \end{cases}$$

Ces équations (qui s'obtiennent en annulant les deux dérivées partielles par rapport à x et à y de l'équation de Γ) sont en général celles de deux droites. Trois cas sont alors possibles :

1. si $b^2 - ac \neq 0$, ces droites sont sécantes, et Γ admet, si elle n'est pas vide, un centre de symétrie et un seul ;
2. si ces droites sont parallèles et distinctes, Γ n'admet pas de centre de symétrie ;
3. si ces droites sont confondues, tout point de cette droite est centre de symétrie pour Γ .

Dans le cas 1, Γ est appelée *conique à centre*. Dans les cas 2 et 3, Γ est du genre parabole ; une parabole n'admet pas de centre de symétrie, mais une droite double ou la réunion de deux droites parallèles admettent une droite de centres de symétrie.

Cette situation se retrouve dans le cas particulier où l'une de ces deux équations n'est pas celle d'une droite :

- si $a = b = 0$ et $d \neq 0$ (ou $b = c = 0$ et $e \neq 0$), il n'y a pas de centre de symétrie ;
- si $a = b = d = 0$ (ou $b = c = e = 0$), on trouve une droite de centres de symétrie.

2 Entrainement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. Soit P une parabole de foyer F et de directrice D , M un point quelconque de P , H son projeté orthogonal sur D . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. La tangente en M à P est la médiatrice de $[HF]$.
2. La normale à P en M passe par F .
3. Le milieu du segment $[HF]$ appartient à la tangente au sommet de P .
4. La normale en M à P est parallèle à la droite (HF) .
5. Toute droite perpendiculaire à D rencontre P en un point et un seul.
6. Le symétrique de M par rapport à (HF) appartient à la tangente au sommet de P .
7. Le symétrique de F par rapport à toute tangente à P appartient à D .

Vrai-Faux 2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Par 4 points du plan tels que 3 d'entre eux ne soient jamais alignés, il passe une ellipse et une seule.
2. Il passe par les sommets de tout rectangle non aplati une ellipse et une seule.
3. Soient F et F' deux points distincts. Par tout point du plan n'appartenant pas au segment $[FF']$, il passe une ellipse de foyers F et F' et une seule.
4. Soit E une ellipse. Pour toute droite du plan, il existe une tangente à E parallèle à cette droite.
5. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, E l'ellipse de représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Le paramètre t d'un point M de E est une mesure de l'angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$.
6. Le disque fermé délimité par le cercle principal d'une ellipse est l'unique disque de rayon minimal contenant l'ellipse.
7. Le projeté orthogonal d'un cercle de l'espace sur un plan est un cercle si et seulement si le plan du cercle est parallèle au plan de projection.

Vrai-Faux 3. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Pour toute hyperbole, il existe un repère orthonormé dans lequel l'hyperbole a une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Pour toute hyperbole, il existe un repère orthonormé dans lequel l'hyperbole a une équation de la forme $xy = k$.

3. Le segment joignant les foyers d'une hyperbole ne rencontre pas l'hyperbole.
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soient a, b, c, d des réels tels que $ad - bc \neq 0$. La courbe d'équation $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ est une hyperbole équilatère.
5. Pour toute hyperbole, il existe un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) normé ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$) et un réel k non nul tels que l'équation de l'hyperbole dans ce repère soit $xy = k$.
6. Pour toute hyperbole, il existe un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) normé ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$) tel que l'équation de l'hyperbole dans ce repère soit $xy = 1$.
7. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. La demi-distance focale c de H vérifie $a^2 = b^2 + c^2$.
8. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est celle d'une hyperbole d'axe focal Ox si et seulement si $a > b$.
9. Soit H une hyperbole. Pour toute droite du plan, il existe une tangente à H parallèle à cette droite.
10. Soit H une hyperbole. Pour toute droite du plan non parallèle à l'une des asymptotes de H , il existe une tangente à H parallèle à cette droite.

Vrai-Faux 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. L'image d'une hyperbole par une homothétie est une hyperbole de même excentricité.
2. L'image d'une ellipse par une affinité orthogonale est toujours un cercle.
3. L'image d'une ellipse par une affinité orthogonale est une ellipse de même excentricité.
4. L'image d'une conique par une affinité orthogonale est toujours une conique.
5. Le cercle est la seule conique à posséder plus de deux axes de symétrie orthogonale.
6. Une conique non dégénérée ne peut posséder deux centres de symétrie.
7. L'image d'une parabole par une symétrie centrale est une parabole.

Vrai-Faux 5. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si deux ellipses ont les mêmes foyers, l'une des deux est incluse dans l'intérieur de l'autre.
2. Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers, elles ne se coupent pas.
3. Deux ellipses distinctes se coupent en au plus deux points.

4. Si deux ellipses distinctes ont en commun un foyer et la directrice associée, elles ne se coupent pas.
5. Si deux ellipses ont les mêmes foyers, elles ont le même centre.
6. Si deux ellipses ont en commun un foyer et la directrice associée, elles ont même centre.
7. Si une ellipse et une hyperbole ont en commun un foyer et la directrice associée, elles ne se coupent pas.
8. Si une droite coupe une ellipse en exactement un point, elle est tangente à l'ellipse en ce point.
9. Une droite coupe une hyperbole en au plus deux points.
10. Si une droite coupe une hyperbole en un point exactement, elle est tangente à l'hyperbole en ce point.

Vrai-Faux 6. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, Γ une conique non vide et non dégénérée d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si $a = 0$, Γ est une parabole.
2. Si Γ est une ellipse, alors $ac - b^2 > 0$.
3. Si $a = c$, alors Γ est un cercle.
4. Si $ac - b^2 < 0$, alors Γ est une hyperbole.
5. Si $b = c = 0$, alors Γ est une parabole.
6. Si Γ est une parabole, alors $a = b = 0$ ou $b = c = 0$.
7. Si $a = c = 0$, alors Γ est une hyperbole.
8. Si Γ est une ellipse, alors a et c sont de même signe.
9. Si $ac - b^2 \neq 0$, alors Γ est une conique à centre.

Vrai-Faux 7. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. La conique d'équation $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ est une droite double.
2. La conique d'équation $3x^2 - 7xy + 2y^2 - 5x - 2 = 0$ est réunion de deux droites sécantes.
3. La conique d'équation $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ est vide.
4. La conique d'équation $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 3 = 0$ est réunion de deux droites parallèles.
5. La conique d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ est vide.
6. La conique d'équation $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ est une droite double.
7. La conique d'équation $3x^2 - 7xy + 2y^2 - 5x - 1 = 0$ est réunion de deux droites.

2.2 Exercices

Exercice 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Écrire l'équation de la parabole P de foyer $F(-1, 2)$ et de directrice D d'équation $3x - 2y + 2 = 0$.

Exercice 2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Écrire l'équation de l'ellipse E de foyer $F(2, 1)$, de directrice D d'équation $x - 2y - 2 = 0$ et d'excentricité $e = 1/\sqrt{2}$.

Exercice 3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Écrire l'équation de l'ellipse E de foyers $F(1, 0)$ et $F'(-1, 2)$ et de demi-grand axe de longueur 3.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par un point fixe F et tangents à un cercle fixe C (on discutera selon la position de F par rapport à C).

Exercice 5. Montrer que deux coniques sont semblables si et seulement si elles ont la même excentricité.

Exercice 6. Montrer que deux paraboles sont isométriques si et seulement si elles ont le même paramètre.

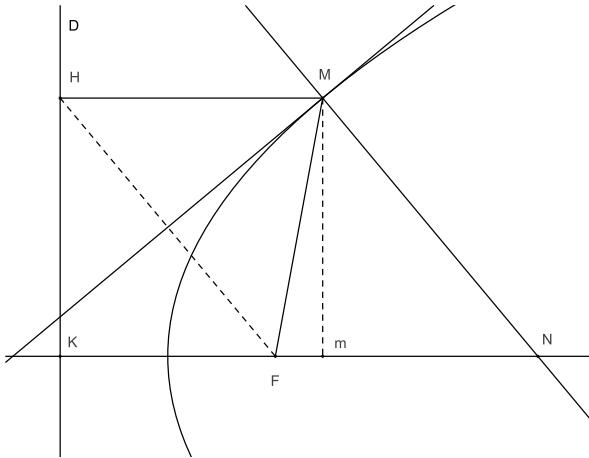
Exercice 7. *Intersection d'une parabole et d'une droite*

1. Montrer que toute parallèle à l'axe d'une parabole coupe celle-ci en exactement un point.
2. Montrer que toute droite non parallèle à l'axe d'une parabole coupe celle-ci en 0, 1 ou 2 points. Montrer qu'elle coupe la parabole en exactement un point si et seulement si elle est tangente à la parabole.

Exercice 8. *Intersection d'une ellipse et d'une droite*

1. Montrer qu'une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ rencontre l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en :
 - 0 point si $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 < \gamma^2$;
 - 1 point si $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = \gamma^2$;
 - 2 points si $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 > \gamma^2$.
2. Montrer qu'une droite rencontre une ellipse en exactement un point si et seulement si elle est tangente à l'ellipse.

Exercice 9. Soit M un point d'une parabole, m son projeté orthogonal sur l'axe, N le point d'intersection de l'axe et de la normale en M à la parabole. Montrer que la longueur mN (appelée *sous-normale* en M) ne dépend pas du point M . Exprimer cette longueur en fonction du paramètre de la parabole.



Exercice 10. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Soient $0 < b < a$ deux réels. Montrer que la famille des courbes Γ_λ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

où λ est un paramètre réel $> -a^2$ et différent de $-b^2$, est exactement la famille des coniques de foyers F et F' , où F et F' sont deux points du plan dont on précisera les coordonnées en fonction de a et b .

Exercice 11. Soit H une hyperbole de demi-distance focale c . Montrer qu'il existe un repère normé porté par les asymptotes de H tel que l'équation de H dans ce repère soit $4XY = c^2$.

Exercice 12. Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormal. Soient T de coordonnées $(t, \frac{1}{t})$, U de coordonnées $(u, \frac{1}{u})$, V de coordonnées $(v, \frac{1}{v})$ trois points distincts de l'hyperbole équilatère H d'équation $xy = 1$.

1. Écrire l'équation de la perpendiculaire Δ à la droite (UV) passant par T .
2. Déterminer les coordonnées du second point d'intersection de Δ avec H .
3. Montrer que ce point appartient aux deux autres hauteurs du triangle UV .
4. En déduire que l'orthocentre de tout triangle dont les sommets appartiennent à une hyperbole équilatère appartient à cette même hyperbole.

Exercice 13. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

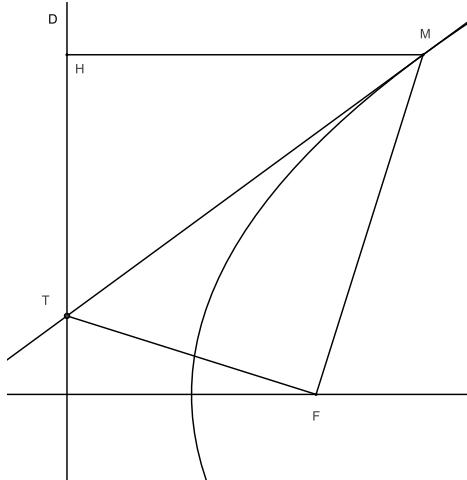
1. Montrer qu'une droite est tangente à E si et seulement si elle coupe E en un point et un seul.
2. Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) et m un réel. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite de pente m passant par M_0 soit tangente à E .

3. Déterminer en fonction de (x_0, y_0) le nombre de tangentes à E passant par M_0 .
4. Montrer que deux droites de pentes respectives m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 m_2 = -1$.
5. Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à E perpendiculaires entre elles est un cercle de centre le centre de E dont on précisera le rayon.

Exercice 14. *Une propriété des tangentes aux coniques*

Soit Γ une conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , M un point de Γ , H son projeté orthogonal sur D . On suppose que la tangente à Γ en M coupe la directrice D en un point T .

1. Montrer que $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{MT} + e^2 \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MT} = 0$ (on pourra dériver la relation $FM^2 - e^2 MH^2 = 0$).
2. En déduire que les droites (FM) et (FT) sont orthogonales (on pourra calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT}$).



Exercice 15. Soit E une ellipse de foyers F et F' . Déterminer le lieu des images de F par :

1. les symétries orthogonales par rapport aux tangentes à E ;
2. les projections orthogonales sur les tangentes à E .

Exercice 16. Montrer que toute tangente à une hyperbole coupe les asymptotes de cette hyperbole en deux points distincts R et S et que l'aire du triangle ORS , où O est le centre de l'hyperbole, ne dépend pas de la tangente considérée.

Exercice 17. *Diamètres conjugués d'une hyperbole*

Soit H une hyperbole, O son centre et D une droite passant par O et distincte des asymptotes de H .

1. Montrer que les milieux des cordes de H parallèles à D appartiennent tous à une même droite D' passant par O .
2. Montrer que les milieux des cordes de H parallèles à D' appartiennent tous à D .

Exercice 18. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , H l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$, A_0 un point de H de coordonnées (x_0, y_0) et Ω le symétrique de A_0 par rapport à O . Le cercle de centre Ω passant par A_0 recoupe en général H en trois points A_1, A_2, A_3 .

1. Écrire une équation polynomiale de degré 3 vérifiée par les abscisses x_1, x_2, x_3 des points A_1, A_2, A_3 .
2. En déduire, en utilisant les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, que Ω est l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$.
3. Soit T un triangle. On suppose que l'isobarycentre de T est aussi le centre du cercle circonscrit à T . Montrer que T est équilatéral.
4. Que peut-on dire du triangle $A_1A_2A_3$?

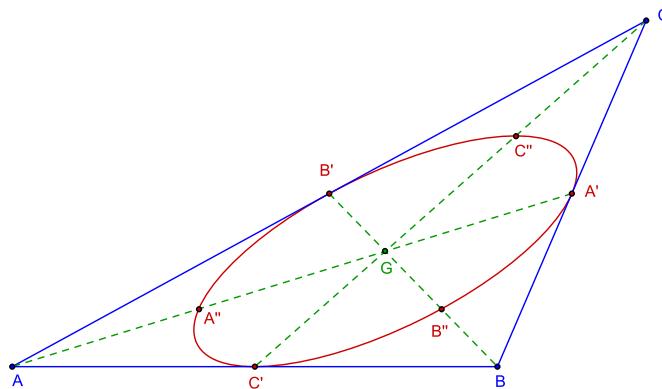
Exercice 19. Théorème d'Apollonius pour l'ellipse

Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , E l'ellipse de représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1. Soit M_1 et M_2 deux points de E de paramètres respectifs t_1 et t_2 , M'_1 et M'_2 leurs symétriques par rapport à O . Donner une condition nécessaire et suffisante sur t_1 et t_2 pour que les diamètres $[M_1M'_1]$ et $[M_2M'_2]$ de E soient conjugués.
2. Montrer que l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués $[OM_1]$ et $[OM_2]$ de E est constante.
3. Montrer que la somme $OM_1^2 + OM_2^2$ des carrés des longueurs de deux demi-diamètres conjugués $[OM_1]$ et $[OM_2]$ de E est constante.

Exercice 20. Montrer que l'image d'une ellipse ou d'un cercle par une application affine bijective est une ellipse ou un cercle.

Exercice 21. Ellipse de Steiner d'un triangle



Soit ABC un triangle non aplati et G son centre de gravité. Montrer qu'il existe une ellipse tangente aux trois côtés de ce triangle en leurs milieux et passant par les milieux des segments $[GA]$, $[GB]$ et $[GC]$. (*Indication : on se ramènera par une transformation affine au cas où le triangle est équilatéral.*)

Exercice 22. Soient (a, b, c) et (a', b', c') deux triplets de réels tels que $ab' - ba' \neq 0$ et k un réel non nul. Montrer que la courbe d'équation $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = k$ est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

Exercice 23. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Montrer que la courbe d'équation $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 3 = 0$ est une parabole. Déterminer les coordonnées de son foyer et l'équation de sa directrice.

Exercice 24. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, Γ la conique d'équation $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 16x - 8y = 16$. Réduire l'équation de Γ . On donnera les coordonnées du centre, les équations des axes, les longueurs du grand axe et du petit axe, les coordonnées des foyers.

Exercice 25. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en un point O , A un point de D_1 différent de O , B un point de D_2 différent de O . On cherche le lieu des centres des coniques tangentes en A à D_1 et en B à D_2 .

1. On rapporte le plan au repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients a, b, c, d, e, f pour qu'une conique à centre d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ soit tangente en A à D_1 et en B à D_2 .
2. En déduire que le centre d'une telle conique appartient à une droite fixe passant par O . Interpréter cette droite dans le triangle OAB .
3. Reprendre le problème dans le cas où les deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, A étant un point quelconque de D_1 et B un point quelconque de D_2 .

Exercice 26. Montrer que toute courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \cos t + b \sin t \\ y = c \cos t + d \sin t \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi[)$$

où a, b, c, d sont des réels, est une ellipse, un cercle ou un segment de droite de centre l'origine (on pourra, dans le cas où la courbe n'est pas portée par une droite, en écrire une équation cartésienne). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe soit un cercle (resp. un segment de droite).

Exercice 27. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, Γ une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ et M_0 , de coordonnées (x_0, y_0) , un point de Γ . Montrer que l'équation de la tangente en M_0 à Γ s'écrit

$$ax_0x + b(y_0x + x_0y) + cy_0y + d(x_0 + x) + e(y_0 + y) + f = 0 .$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , P la parabole d'équation $y = x^2$.

- A L'axe Ox est axe de symétrie de P .
- B Le foyer de P a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- C La directrice de P a pour équation $y = -\frac{1}{4}$.
- D La directrice de P a pour équation $x = -\frac{1}{4}$.
- E Le foyer de P a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Question 2. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, E l'ellipse d'équation $x^2 + 2y^2 = 2$.

- A Le demi-grand axe de E a pour longueur 1.
- B Le demi-grand axe de E a pour longueur $\sqrt{2}$.
- C L'aire intérieure à E est égale à $\frac{\pi}{2}$.
- D Les foyers de E ont comme coordonnées $(\pm 1, 0)$.
- E La droite d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est une directrice de E .

Question 3. Soit, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , H l'hyperbole d'équation $xy = 1$, F et F' ses foyers.

- A Les axes de symétrie de H sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
- B Les axes Ox et Oy sont axes de symétrie de H .
- C La distance focale FF' est égale à 4.
- D L'excentricité de H est égale à 2.
- E Les foyers de H ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Question 4. Soit E l'ellipse de représentation paramétrique $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec $0 < b < a$.

- A L'aire délimitée par E est égale à πab .
- B Le paramètre t d'un point M est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.
- C Les foyers de E ont pour coordonnées $(-b, 0)$ et $(b, 0)$.
- D E est l'image du cercle de centre O et de rayon a par l'affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport b/a .

- E La valeur minimale de la longueur OM quand M parcourt E est égale à b .

- Question 5.** A Une ellipse est entièrement déterminée par son centre et ses deux foyers.
 B Une ellipse est entièrement déterminée par ses deux foyers et un sommet de son grand axe.
 C Si deux ellipses ont la même excentricité, il existe une isométrie transformant la première en la seconde.
 D Une ellipse est entièrement déterminée par ses deux foyers et un de ses points.
 E L'excentricité d'une ellipse est égale au rapport des longueurs de ses deux axes.

Question 6. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O . Les courbes d'équations suivantes sont des coniques de foyer O :

- A $\rho = \cos \theta$;
 B $\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$;
 C $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$;
 D $\rho(1 - 2 \sin \theta) = 2$;
 E $2\rho \sin \theta = 1$.

Question 7. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

- A La courbe d'équation $(x - 1)(y - 2) = 1$ est une hyperbole.
 B La courbe d'équation $x^2 + y^2 + xy = 1$ est un cercle.
 C La courbe d'équation $(x + 1)(y - 3) = 0$ est une hyperbole.
 D La courbe d'équation $(x + 1)^2 - y = 0$ est une parabole.
 E La courbe d'équation $y(2x + 3) - (x + 2) = 0$ est une ellipse.

Question 8. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Les courbes d'équations suivantes sont des ellipses :

- A $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.
 B $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y = 0$.
 C $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 6y = 0$.
 D $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 1 = 0$.
 E $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$.

Question 9. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Les courbes d'équations suivantes sont des hyperboles :

- A $xy + 3x - y - 5 = 0$.
 B $xy + 3x + 2y + 6 = 0$.
 C $3x^2 - 2xy - y^2 + x + 3y - 3 = 0$.
 D $3x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + y - 8 = 0$.
 E $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 5x - y + 2 = 0$.

Question 10. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Les courbes d'équations suivantes sont des paraboles :

- A $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 3x + 2y - 2 = 0$.
- B $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$.
- C $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$.
- D $9x^2 - 42xy + 49y^2 + 12x - 28y + 4 = 0$.
- E $x^2 - 6xy + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$.

Réponses : 1-CE 2-BD 3-AC 4-AE 5-BD 6-BD 7-AD 8-CD 9-AC 10-BC

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours :

1. Donner la définition par foyer, directrice et excentricité d'une conique.
2. Rappeler quelles sont les coniques admettant deux foyers. Donner, pour ces coniques, une définition faisant intervenir les deux foyers.
3. Rappeler la définition d'une hyperbole *équilatère*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels positifs a et b pour que l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé soit équilatère.
4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e pour que l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$ soit celle d'un cercle.
5. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Donner la nature et une représentation paramétrique de la conique d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Exercice 1 : Soit p un réel positif et P la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'axe, le sommet, le foyer F et la directrice D de P .
2. On considère la représentation paramétrique $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$ de P . Écrire l'équation de la tangente à P au point de paramètre t .
3. Soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0) un point du plan. Écrire une équation vérifiée par le paramètre t d'un point de P pour que la tangente à P en ce point passe par M_0 . Discuter selon la position de M_0 le nombre de tangentes à P passant par M_0 .

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M_0 pour qu'il passe par M_0 deux tangentes à P perpendiculaires entre elles.
5. Soit M un point de P , H son projeté orthogonal sur D . Montrer que tout point de la tangente en M à P est équidistant de H et F .
6. En déduire une construction à la règle et au compas des tangentes à P menées par un point M_0 du plan (dans le cas où il existe de telles tangentes). Retrouver ainsi les résultats de la question 3.
7. Déduire de la question précédente une nouvelle démonstration du résultat de la question 4.

Exercice 2 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Écrire l'équation de l'hyperbole H de foyer $F(3, 2)$, de directrice D d'équation $x - y + 1 = 0$ et d'excentricité $\sqrt{2}$.
2. Écrire l'équation de H sous la forme $(x - a)(y - b) = c$ pour des réels a, b, c . En déduire les coordonnées du centre Ω de H .
3. Déterminer les axes, puis le second couple foyer-directrice (F', D') de H (on donnera les coordonnées de F' et une équation de D').
4. Montrer que la courbe E d'équation $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 14x - 26y + 27 = 0$ est une ellipse.
5. Montrer que Ω est le centre de E .
6. Déterminer les axes et l'équation réduite de E .
7. En déduire les longueurs des axes, la distance focale et l'excentricité de E .
8. Montrer que les coniques E et H ont les mêmes foyers.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. La conique C de foyer F , de directrice D et d'excentricité $e > 0$, où F est un point du plan n'appartenant pas à D , est l'ensemble des points du plan dont le rapport $\frac{MF}{MH}$ (où H est le projeté orthogonal de M sur D) des distances à F et à D est égal à e :

$$C = \left\{ M \mid \frac{d(M, F)}{d(M, D)} = e \right\} = \left\{ M \mid \frac{MF}{MH} = e \right\} .$$

2. Les coniques admettant deux couples foyer-directrice sont les ellipses et les hyperboles.

Une ellipse E de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan dont la somme $MF + MF'$ des distances à ses deux foyers est une constante $2a$ strictement supérieure à la distance focale FF' :

$$E = \{M \mid MF + MF' = 2a\} \quad \text{avec } 2a > FF'.$$

Une hyperbole H de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan dont la différence $MF - MF'$ des distances à ses deux foyers est égale en valeur absolue à une constante $2a$ strictement inférieure à la distance focale FF' :

$$H = \{M \mid |MF - MF'| = 2a\} \quad \text{avec } 2a < FF'.$$

3. Une hyperbole est dite équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbole soit équilatère est que son excentricité soit égale à $\sqrt{2}$.

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ admet comme asymptotes les droites d'équations $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$. Si le repère est orthonormé, elle est équilatère si et seulement si $a = b$.

4. L'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0$ en repère orthonormal est celle d'un cercle si et seulement si $a = c \neq 0$ et $b = 0$. On remarque que l'ensemble des points vérifiant cette équation n'est jamais vide puisqu'il contient l'origine (ce cercle est réduit à un point si $d = e = 0$).
5. La courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans un repère orthonormal est une hyperbole équilatère de centre l'origine, d'axe focal l'axe Ox et d'asymptotes les bissectrices des axes.

Elle admet les représentations paramétriques

- $x = \varepsilon \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, +1\})$;
- $x = \frac{1}{\cos t}, \quad y = \tan t \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$;
- $x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \quad (t \in \mathbb{R}^*)$.

Exercice 1 :

1. L'axe Ox est axe de symétrie pour P , puisque si le point (x, y) appartient à P , le point $(x, -y)$ appartient aussi à P .

Il en résulte que le sommet de P est l'origine O du repère.

Le foyer F a donc comme coordonnées $(c, 0)$ pour un réel c et la directrice D comme équation $x = -c$. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à P si et seulement si $MF = MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur D , i.e. le point de coordonnées $(-c, y)$, d'où l'équation de P : $(x - c)^2 + y^2 = (x + c)^2$, soit encore $y^2 = 4cx$. En identifiant cette équation à celle de P , on obtient $c = p/2$, d'où les coordonnées de F $(p/2, 0)$ et l'équation de D : $x = -p/2$.

2. Le vecteur dérivé $(t/p, 1)$ du vecteur $(t^2/2p, t)$ est un vecteur directeur de la tangente à P au point de paramètre t . Une équation de cette tangente est donc :

$$\begin{vmatrix} t/p & x - t^2/p \\ 1 & y - t \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$2ty - 2px - t^2 = 0.$$

3. La tangente à P au point de paramètre t passe par M_0 si et seulement si

$$t^2 - 2ty_0 + 2px_0 = 0. \quad (*)$$

Cette équation du second degré en t admet des solutions réelles si et seulement si son discriminant réduit $\Delta' = y_0^2 - 2px_0$ est positif ou nul. Si $\Delta' = 0$, le point M_0 appartient à P et l'unique solution de l'équation est $t = y_0$, ce qui traduit le fait que cette droite est la tangente à P en M_0 .

Si $\Delta' > 0$, le point M_0 est situé à l'extérieur de la parabole P (en convenant d'appeler intérieur de la parabole la partie convexe du plan délimitée par celle-ci et extérieur son complémentaire) et il passe par M_0 deux tangentes à P .

4. Pour qu'il passe par M_0 deux tangentes à P perpendiculaires, il faut que Δ' soit strictement positif et que le produit des pentes des tangentes à P passant par M_0 soit égal à 1, i.e. que $\frac{p^2}{t_1 t_2} = -1$, où t_1 et t_2 sont les deux racines de (*). Or $t_1 t_2 = 2px_0$, d'où la condition $x_0 = -p/2$. Si cette condition est vérifiée, on a $\Delta' > 0$ et il passe donc bien par M_0 deux tangentes à P . Il en résulte que l'ensemble des points d'où l'on peut mener à P deux tangentes perpendiculaires entre elles est la directrice D de P .

5. On sait que la tangente en M à P est la médiatrice du segment $[FH]$ (proposition 4). Tout point de cette tangente est donc équidistant de F et H .

On pouvait aussi redémontrer ce résultat : le point F a pour coordonnées $(p/2, 0)$ et le point $H (-p/2, t)$; il en résulte que la médiatrice de $[FH]$ a pour équation

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2 + (y - t)^2$$

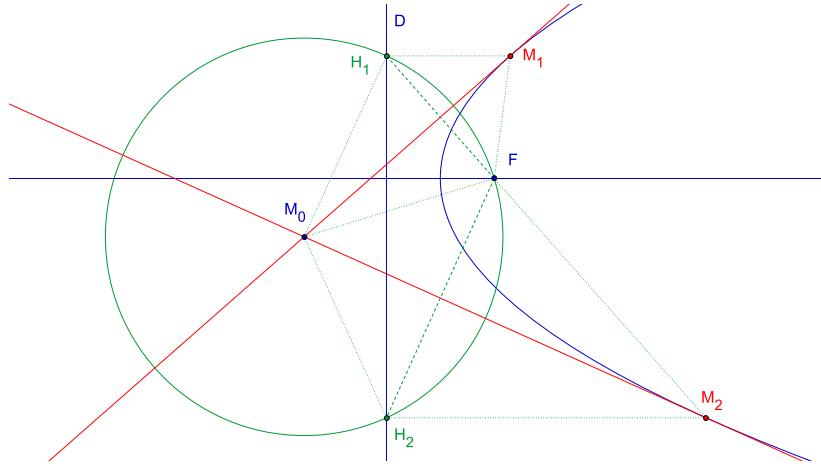
soit encore

$$2ty - 2px - t^2 = 0$$

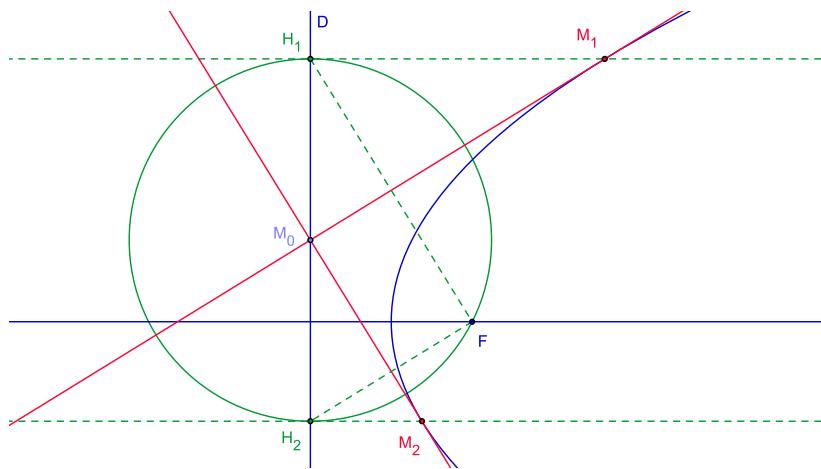
qui est l'équation de la tangente en M à P .

6. Si un point M_0 du plan appartient à la tangente en M à P , le cercle de centre M_0 et de rayon M_0F coupe D en H . Pour construire les tangentes à P passant par M_0 , il suffit donc de tracer le cercle de centre M_0 et de rayon M_0F . Si ce cercle ne coupe pas D , il ne passe pas par M_0 de tangente à P (cette condition équivaut à $d(M_0, D) > M_0F$ et signifie que M_0 est à l'intérieur de la parabole). S'il coupe

D en un unique point H , le point M_0 appartient à P et la tangente à P en M_0 est l'unique tangente à P passant par M_0 . S'il coupe D en deux points distincts H_1 et H_2 , on construit deux points M_1 et M_2 de P en prenant l'intersection de la médiatrice de $[FH_i]$ avec la perpendiculaire à D en H_i , et les tangentes à P en M_1 et M_2 sont les deux tangentes à P passant par M_0 .



7. Les tangentes à P menées par M_0 sont donc les médiatrices des segments $[FH_1]$ et $[FH_2]$, où H_1 et H_2 sont les points d'intersection du cercle C de centre M_0 passant par F avec D . Ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si les droites (FH_1) et (FH_2) le sont, ce qui signifie que le point F appartient au cercle de diamètre $[H_1H_2]$. Mais ce cercle n'est autre que C , puisqu'il passe par les trois points F , H_1 et H_2 . Son centre M_0 est le milieu de $[H_1H_2]$ et appartient donc à D . Réciproquement, si M_0 appartient à D , il ressort immédiatement de la construction précédente qu'il passe par M_0 deux tangentes à P perpendiculaires entre elles. La directrice est ce qu'on appelle la *courbe orthoptique* de la parabole (ensemble des points d'où l'on voit la parabole sous un angle droit).



Exercice 2 :

1. Le point M de coordonnées (x, y) appartient à H si et seulement si $MF^2 = 2d(M, D)^2$, i.e.ssi et seulement si $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - y + 1)^2$, ou encore $xy - 4x - y + 6 = 0$.
2. Cette équation s'écrit encore $(x - 1)(y - 4) = -2$, soit, en posant $X = x - 1$, $Y = y - 4$, $XY = -2$. Mais (X, Y) sont les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, où Ω est le point de coordonnées $(1, 4)$ dans le repère initial (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'équation de H dans ce nouveau repère est donc $XY = -2$, ce qui montre que la symétrie centrale de centre Ω laisse H invariante. On en déduit que Ω est le centre de l'hyperbole H .
3. Le foyer F' (resp. la directrice associée D') est symétrique de F (resp. de D) par rapport à Ω . La symétrie centrale de centre Ω est donnée par les formules $x' = 2 - x$, $y' = 8 - y$, où (x, y) sont les coordonnées d'un point et (x', y') celles de son image. Il en résulte que F' a pour coordonnées dans le repère initial $(-1, 6)$ et D' pour équation dans ce repère $y - x - 5 = 0$.
4. La courbe E d'équation $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 14x - 26y + 27 = 0$ est une conique du genre ellipse, puisque la forme quadratique $(x, y) \mapsto 3x^2 + 3y^2 + 2xy$ est définie positive. Cette courbe n'est pas vide, puisqu'elle possède par exemple deux points d'abscisse 0, et ce n'est pas un cercle ; c'est donc une ellipse.
5. Les coordonnées du centre de E sont solution du système

$$\begin{cases} 6x + 2y - 14 = 0 \\ 2x + 6y - 26 = 0 \end{cases}$$

obtenu en annulant les dérivées partielles de $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 14x - 26y + 27$. Ce système admet l'unique solution $x = 1$, $y = 4$.

6. En utilisant les formules de changement de repère $x = X + 1$, $y = Y + 4$, on voit que E admet comme équation $3X^2 + 3Y^2 + 2XY - 32 = 0$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Des vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Les coordonnées (X, Y) d'un point M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont reliées aux coordonnées (X', Y') de ce point dans le repère orthonormal $\left(\Omega, \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}, \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}\right)$ déduit par rotation de centre Ω et d'angle $\pi/4$ par

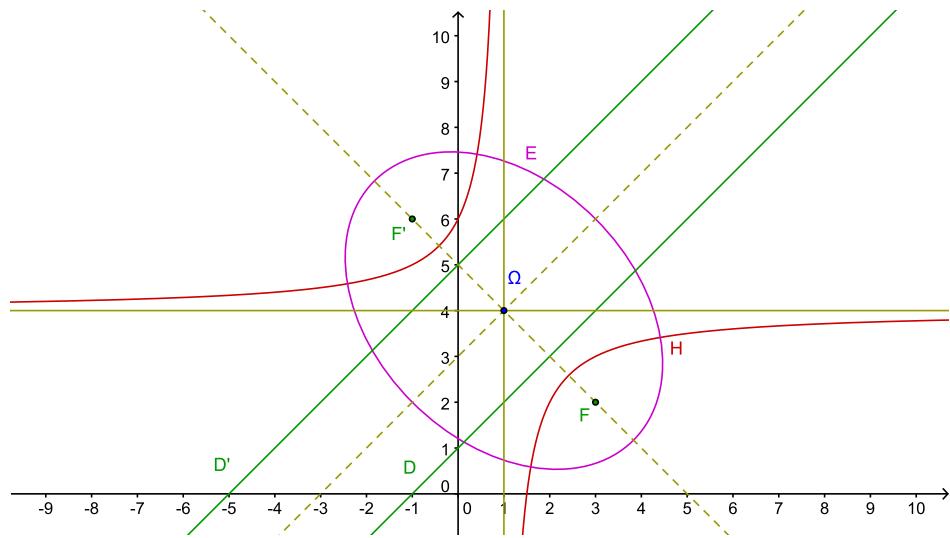
$$X = \frac{X' - Y'}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{X' + Y'}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte que E a comme équation $4X'^2 + 2Y'^2 - 32 = 0$, soit encore

$$\frac{X'^2}{8} + \frac{Y'^2}{16} = 1$$

dans ce nouveau repère.

7. Le demi-grand axe de E vaut donc $a = 4$ et le demi-petit axe $b = 2\sqrt{2}$. La demi-distance focale c est définie par $c^2 = a^2 - b^2$, d'où $c = 2\sqrt{2}$. L'excentricité de E est donnée par $e = c/a = \sqrt{2}/2$. Le grand axe de E est porté par la droite d'équation $x+y-5=0$ (axe $\Omega Y'$ du nouveau repère) et le petit axe par la droite d'équation $x-y+3=0$ (axe $\Omega X'$ du nouveau repère) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
8. L'hyperbole H et l'ellipse E ont même centre, même axe focal, et même distance focale. Il en résulte qu'elles ont les mêmes foyers.



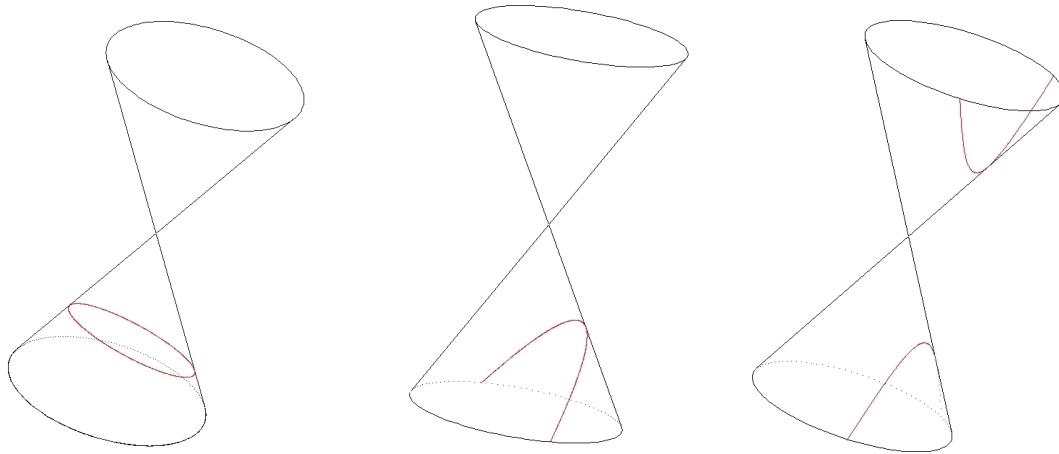
3 Compléments

3.1 Sections planes des cônes et des cylindres de révolution

Les mathématiciens grecs étudiaient déjà les coniques, qu'ils définissaient comme sections planes des cônes de révolution. On attribue à Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 av. J.-C.) l'introduction, dans son traité en huit volumes intitulé *les Coniques*, de la terminologie ellipse, hyperbole, parabole, mais ces termes étaient peut-être utilisés avant lui et beaucoup de propriétés de ces courbes étaient déjà connues. Ménechme (v. 380-v. 320 av.J.-C.) s'en servait pour tenter de résoudre le problème de la duplication du cube (voir le chapitre « Géométrie euclidienne »). En effet, si on veut introduire entre deux nombres a et b deux réels x et y tels que a, x, y, b constituent une progression géométrique, on a $\frac{x}{a} = \frac{y}{x}$ et $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$, de sorte que $x^2 = ay$ et $xy = ab$; on est donc ramené à construire l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole ; mais on peut aussi écrire $\frac{y}{x} = \frac{b}{y}$, ou encore $x^2 = ay$ et $y^2 = bx$, ce qui amène à construire l'intersection de deux paraboles. C'est à Pappus (290-350) qu'on attribue la définition des foyers et directrices, mais là encore ces notions étaient peut-être déjà connues avant lui.

De fait, l'intersection d'un cône de révolution C par un plan P ne passant pas par le sommet S de C est :

- un cercle si P est perpendiculaire à l'axe de C ;
- une ellipse si l'intersection de C et du plan parallèle à P passant par S est réduite à S (sans que P soit perpendiculaire à l'axe de C) ;
- une parabole si le plan parallèle à P mené par S est tangent à C le long d'une génératrice ;
- une hyperbole si l'intersection de C et du plan parallèle à P passant par S est la réunion de deux génératrices de C .



L'intersection d'un cylindre de révolution avec un plan est :

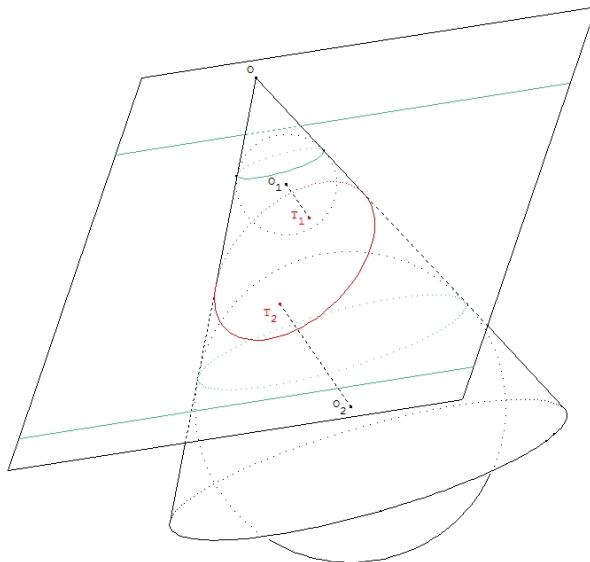
- soit vide, soit constituée d'une ou deux génératrices si l'axe du cylindre est parallèle au plan ;
- un cercle si le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre ;
- une ellipse si le plan n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe du cylindre.

3.2 Les théorèmes belges

Alors que la définition et les propriétés des coniques étaient bien connues depuis l'antiquité grecque, ce n'est qu'au XIX^e siècle que le théorème de Dandelin (1822) (ou de Dandelin-Quételet)¹ est venu caractériser les foyers et les directrices d'une conique obtenue comme section plane d'un cône de révolution.

Théorème 1. *La section d'un cône de révolution par un plan est une conique dont les foyers sont les points de contact avec ce plan des deux sphères inscrites dans le cône et tangentes à ce plan et les directrices les intersections avec ce plan des deux plans contenant les cercles de contact de ces sphères avec le cône.*

Dans le cas de l'ellipse, les deux sphères sont situées de part et d'autre du plan, dans le cas de l'hyperbole du même côté du plan de section. Dans le cas de la parabole, il n'y a qu'une sphère (et un couple foyer-directrice).



La figure ci-dessus représente le cas de l'ellipse : les deux sphères de centres O_1 et O_2 inscrites dans le cône sont tangentes en T_1 et T_2 au plan de section ; ces points sont les foyers de l'ellipse ; les directrices (représentées en vert) sont les intersections avec le plan de section des deux plans contenant les cercles de contact des deux sphères avec le cône.

1. Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) et Adolphe Quetelet (1796-1874) étaient deux mathématiciens belges, d'où le titre de cette section. Quetelet est surtout connu pour ses travaux en statistique.

3.3 Lois de Kepler

Les astronomes grecs plaçaient la terre au centre de l'univers, les planètes et le soleil tournant autour d'elle sur des cercles ou des sphères, seules figures à leurs yeux suffisamment parfaites pour accueillir le mouvement des astres. Ils ne tardèrent pourtant pas à s'apercevoir que ce système ne parvenait pas à expliquer les observations qu'ils effectuaient. Ils imaginèrent donc un système plus compliqué, de planètes tournant sur des cercles (les épicycles) dont les centres tournaient eux-mêmes sur d'autres cercles (les déférents) centrés en la terre, l'important étant de préserver l'idée de mouvements circulaires uniformes et de la position centrale de la terre (géocentrisme).

Ce système connut son apogée au II^{ème} siècle de notre ère avec le système de Ptolémée, développé dans son traité l'*Almageste*, qui fit référence pendant plus de dix siècles, jusqu'à ce que Nicolas Copernic (1473-1543) propose son système héliocentrique. Celui-ci, perfectionné par Johannes Kepler (1571-1630), s'appuyant sur les observations de l'astronome danois Tycho Brahe (1546-1601), puis par Galilée (1564-1642), mit cependant longtemps à s'imposer face à l'opposition de l'Église et des partisans du géocentrisme.

Kepler énonça au début du XVII^{ème} siècle les trois lois décrivant le mouvement des planètes autour du soleil, lois qui portent aujourd'hui son nom.

Première loi (1609) : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi (loi des aires) : L'aire balayée par le segment joignant le soleil à une planète entre deux instants est proportionnelle à la durée séparant ces deux instants.

Troisième loi (loi des périodes) : Le carré de la période de la rotation d'une planète autour du soleil est directement proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse constituant la trajectoire de cette planète.

Ce fut finalement Isaac Newton (1643-1727) qui développa le modèle mathématique permettant de déduire le mouvement elliptique des planètes autour du Soleil de sa théorie de la gravitation universelle (1687).

3.4 Optique géométrique

D'après la loi de la réflexion de Descartes-Snell, quand un rayon lumineux se réfléchit sur une surface, le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale à la surface au point d'incidence sont coplanaires, et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. Il résulte alors des propriétés des tangentes à la parabole (voir section 1.3) qu'un miroir parabolique concentre tous les rayons lumineux parallèles à son axe en son foyer. Par miroir parabolique, il faut entendre ici un miroir concave obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe, i.e. un miroir obtenu en rendant réfléchissant l'intérieur d'un paraboloïde de révolution. Si on oriente l'axe de ce paraboloïde vers le soleil, tous les rayons solaires se concentreront au foyer de la parabole. C'est le principe des fours



FIGURE 1 – Le four solaire d’Odeillo

2

solaires (en fait, comme on ne peut orienter facilement l’axe de grands paraboloïdes vers le soleil, les rayons lumineux sont d’abord redirigés vers le miroir parabolique principal par des héliostats, miroirs secondaires orientables). Le grand four solaire d’Odeillo, dans les Pyrénées-Orientales, possède un miroir parabolique d’une surface de 1830 mètres carrés et permet d’atteindre en quelques secondes en son foyer une température de 3500°C.

Le procédé n’est pas entièrement nouveau. La légende raconte qu’Archimète aurait mis le feu à la flotte romaine qui assiégeait la ville de Syracuse en utilisant des miroirs paraboliques. Beaucoup pensent qu’il ne s’agit que d’une légende ; des élèves-ingénieurs du MIT ont récemment tenté de refaire l’expérience et sont parvenus à mettre le feu à un navire (immobile et bien sec) situé à une trentaine de mètres en utilisant des miroirs achetés dans le commerce (vous pouvez lire ici le compte-rendu de leur expérience).

Ce même principe de concentration des rayons est utilisé dans les antennes paraboliques (les « paraboles »), les radars et même les phares d’automobiles (l’ampoule étant située au foyer, les rayons lumineux dirigés vers l’arrière se réfléchissent en un faisceau parallèle).

2. Photo Björn Appel, Wikipedia

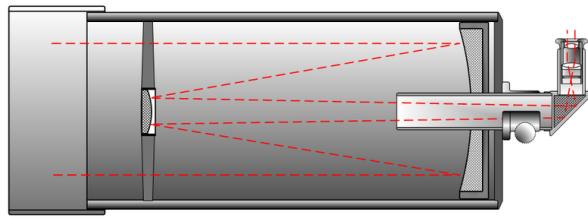


FIGURE 2 – Le télescope de Cassegrain

3

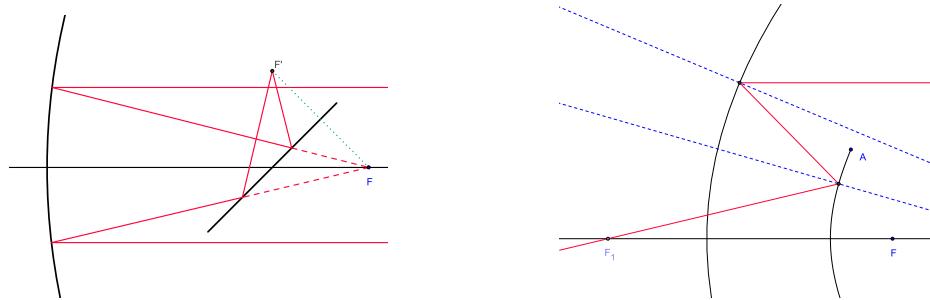


FIGURE 3 – Principe des télescopes de Newton et de Cassegrain

Il est également utilisé dans les télescopes. Un télescope réfléchit les rayons lumineux et son miroir principal est un paraboloïde concave qui concentre ces rayons au foyer. Comme l'observateur (humain ou récepteur photographique) ne peut se situer en ce foyer, un miroir secondaire est utilisé. Dans le télescope de Newton, un miroir secondaire plan détourne les rayons vers un oculaire latéral. Dans le télescope de Schmidt-Cassegrain, un miroir secondaire hyperbolique convexe, dont un foyer coïncide avec le foyer du miroir parabolique principal, concentre les rayons lumineux en son second foyer (voir les propriétés des tangentes à l'hyperbole); l'oculaire est ainsi situé dans l'axe du télescope.

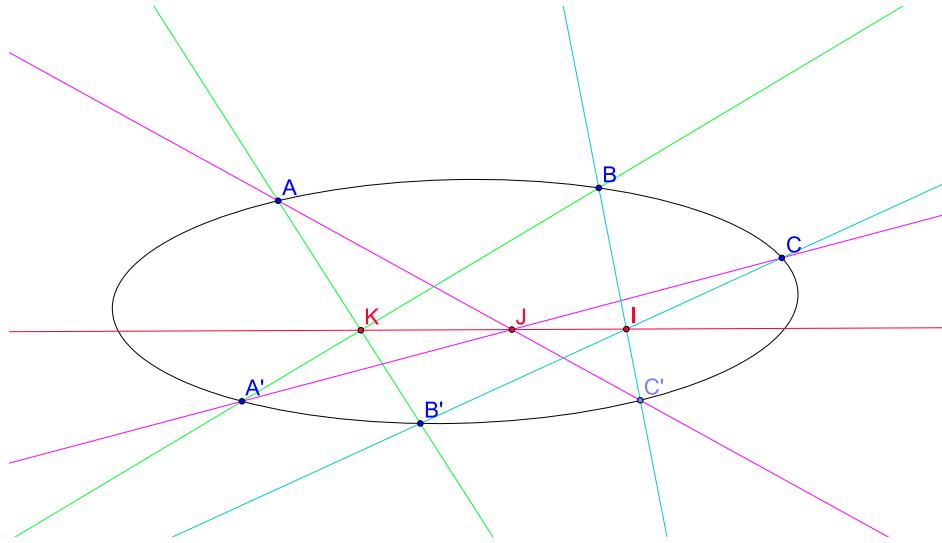
3.5 L'hexagramme mystique

Le théorème de Pascal (dit aussi *hexagramme mystique de Pascal*) dit que si les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique se coupent en des points I , J , K , les trois points I , J , K sont alignés.

Théorème 2. *Soient dans un plan A, B, C, A', B', C' six points distincts tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés et que les droites (BC') et (CB') (resp. (CA')*

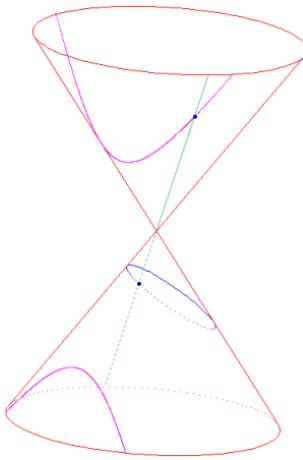
3. Image Szöcs Tamás, Wikipedia

et (AC') , (AB') et (BA')) se coupent en un point I (resp. J , K). Alors les six points A, B, C, A', B', C' sont situés sur une même conique non dégénérée si et seulement si les trois points I, J, K sont alignés.



Une conséquence en est que, par cinq points en position générale, il passe une conique et une seule. Le théorème de Pascal donne précisément un moyen de construire point par point cette conique : si A, B, C, A', B' sont les points donnés, pour construire un point supplémentaire C' de la conique, il suffit de tracer une droite D passant par A ; si les droites (AB') et $(A'B)$ se coupent en K , les droites (CA') et D en J , et les droites (CB') et (KJ) en I , le point d'intersection C' des droites D et (BI) appartient à la conique (en supposant bien sûr ces droites sécantes).

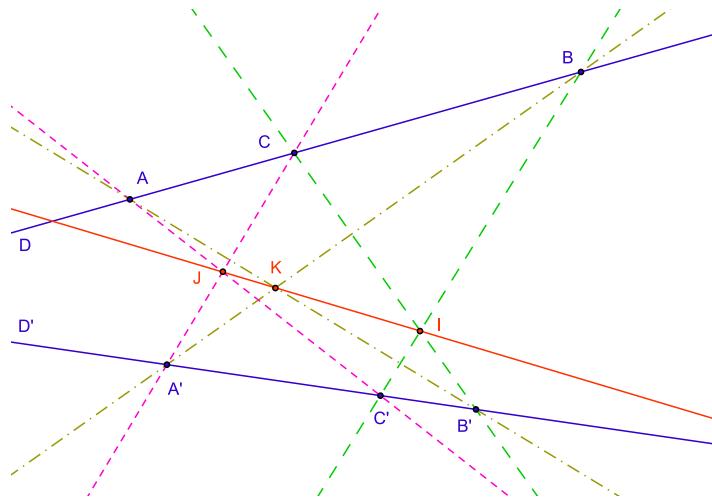
Ce théorème a été énoncé par Blaise Pascal (1623-1662) dans son *Essai pour les coniques*, composé avant qu'il ait atteint l'âge de dix-sept ans et publié à Paris en février 1640. La démonstration originale de Pascal n'est pas connue dans sa totalité, mais l'idée essentielle en est qu'il suffit de démontrer le théorème pour le cercle. En effet, on peut passer du cercle à n'importe quelle conique par une transformation géométrique simple qui préserve le concours des droites et l'alignement des points. Cette idée, développée par Girard Desargues (1591-1661) dans son *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evènemens des Rencontres du Cone avec un Plan*, paru en 1639, permet de considérer que, du point de vue de la géométrie projective (la partie de la géométrie qui traite justement des propriétés de concours et d'alignement), toutes les coniques sont équivalentes, et repose sur la remarque suivante : si on considère deux sections planes d'un même cône de révolution, on peut établir une correspondance naturelle de l'une sur l'autre en associant à tout point de la première le point de la seconde situé sur la même génératrice du cône.



Dans le cas où trois des points donnés (et trois seulement) sont alignés, la conique passant par les cinq points est dégénérée : il s'agit de la réunion des deux droites portant les cinq points.

De fait, dans le cas où la conique dégénère en la réunion de deux droites, le théorème de Pascal se réduit au théorème de Pappus :

Théorème 3. *Soient dans un plan A, B, C trois points distincts alignés sur une droite D et A', B', C' trois points distincts alignés sur une droite D' . On suppose que les droites (BC') et (CB') (resp. (CA') et (AC') , (AB') et (BA')) se coupent en un point I (resp. J, K). Alors les trois points I, J, K sont alignés.*



3.6 Billards

Si on étudie la trajectoire d'un rayon lumineux issu de l'intérieur d'une ellipse et se réfléchissant sur le bord suivant la loi de Descartes, le rayon réfléchi restera toujours

tangent à une ellipse ou une hyperbole ayant les mêmes foyers que l'ellipse de départ. En optique, cette courbe s'appelle une *caustique* (du grec *kaustikos* : qui brûle).

On peut aussi voir cette figure comme la trajectoire d'une boule de billard rebondissant sur le bord d'un billard elliptique.

On constate en particulier qu'il y a toujours une région du billard dans laquelle la boule ne pénétrera jamais.

