

# CONJONCTURES **27**

## Oh ! Hasard



REVUE QUÉBÉCOISE D'ANALYSE ET DE DÉBAT

# Le hasard, son infortune et ses paradoxes \* de l'État providence à l'État loterie

par Alain Latour et Jean-Pierre Latour

*Un coup de dés jamais n'abolira le hasard*  
Stéphane Mallarmé (1897)

Un des postulats de la pensée religieuse réside dans la croyance que ce qui arrive était écrit depuis le commencement. Ainsi la chaîne des événements aurait déjà depuis son début une fin assignée. Le commencement énonce une fin, au terme de l'accomplissement d'un projet. Dans cette pensée, la notion de hasard ne peut trouver place qu'à la condition d'imaginer que l'écriture céleste puisse être contrariée, que son accomplissement puisse être déjoué, entravé. Or, toujours selon cette pensée, s'opposer à la volonté de cette écriture ne peut être que l'œuvre du malin. D'où, sans doute, cette part maudite qui revient aux manifestations du hasard. Si, comme le déclarait Einstein, « Dieu ne joue pas aux dés », faut-il alors imaginer qu'un diable s'amuse à les lancer ?

Bien qu'il soit impossible de faire un exposé parfaitement rigoureux de la définition des notions de hasard, de contingence et de probabilité, une science de l'aléatoire néanmoins est née, car les phénomènes aléatoires sont parfaitement observables. Quand un événement peut avoir lieu ou ne pas avoir lieu et qu'un autre pourrait survenir pour le remplacer, l'aléa bouscule l'inéluctable.

Selon les portions du réel que l'on examine, le hasard et la nécessité semblent se partager inégalement la gestion des événements. Il n'est pas étonnant, par exemple, qu'un biologiste comme Jacques Monod<sup>1</sup> ait senti ce pressant besoin de livrer une réflexion sur le hasard et son contraire qu'il nomme nécessité.

L'existence du vivant et, plus éloquemment encore, les propriétés qui le caractérisent (téléonomie, morphogenèse autonome et invariance reproductive) supposent une écriture biomoléculaire projective<sup>2</sup>. En fait, le maintien des êtres vivants requiert une série de causes et d'effets, de boucles de réactions autorégulatrices<sup>3</sup> qui repoussent l'idée de hasard, mais sans la chasser complètement pour autant. Quand l'aléatoire s'installe au cœur d'un organisme vivant, c'est la mort qui s'annonce. La vie ne s'accommode du hasard que si elle parvient à le neutraliser. Le vieillissement et la mort résultent d'un échec des stratégies d'invariance au niveau moléculaire et cellulaire. Mais de ces erreurs, dans certains cas, une mutation utile du texte génétique peut résulter... Des hasards des combinaisons génétiques naît aussi une variété de formes indispensable à l'adapta-

\*Paru dans *Conjonctures*, 27, 51-63, 1998.

*Mon frère Jean-Pierre (1951-2005) a occupé une place déterminante dans ma vie.  
Peu de gens mesurent réellement l'ampleur de l'influence qu'il a exercée sur moi.*  
A.L.

1. Jacques Monod, *Le hasard et la nécessité*, essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne, Paris, Éditions du Seuil, 1970.

2. Mais, précise Monod, rien ne permet de croire que l'apparition des molécules (acides aminés et nucléiques) qui construisent cette écriture soit due à autre chose qu'au hasard. Mais, une fois que le hasard a produit certains agencements moléculaires spécifiques, un déterminisme peut ensuite s'installer...

3. L'interaction des protéines à l'origine des performances téléonomiques du vivant est fondée sur des propriétés stéréospécifiques, c'est-à-dire la capacité de reconnaître d'autres molécules. Cette capacité de reconnaître, Monod la qualifie de « cognitive », prenant le soin tout de même de placer le mot entre guillemets. Ibid., p. 68.

tion et à la survie des êtres vivants.

D'ailleurs Jacques Monod, dans *Le hasard et la nécessité*, estimait que « le hasard seul est à la source de toute nouveauté, de toute création dans la biosphère »<sup>4</sup>. Cette « liberté absolue mais aveugle » seule permet une évolution<sup>5</sup>. Car l'invariance résistante à tout changement, elle pétrifie réactions, formes et structures<sup>6</sup>. Autrement dit, dans le monde du vivant, le hasard devient donc aussi nécessaire à l'évolution qu'il peut s'avérer néfaste et même dévastateur pour un organisme particulier.

Pourtant, l'idée de hasard est le plus souvent perçue comme étant voisine de celle de désordre et de chaos. Le hasard s'oppose à l'intention, au déterminisme, contredisant la stabilité structurale d'un dessein. Ainsi perçu, le hasard devient facteur de déstructuration. Plus la part du hasard augmente, mieux l'entropie s'installe. Or, ce point de vue, formalisé par le deuxième principe de la thermodynamique, fait de plus en plus l'objet d'une mise en question. Car, dans les phénomènes chaotiques, des effets structurants spontanés s'observent<sup>7</sup>. L'apparition de la vie en serait notamment tributaire. Curieux paradoxe que cette force structurante surgisse du chaos.

Il nous faut donc revenir au principe général que, selon les portions du réel observées, le hasard et la nécessité se partagent inégalement la gestion des événements. Le pur chaos, comme le pur déterminisme événementiel, seraient deux états théoriques, les deux pôles indiquant des forces structurant la matière, qu'elle soit inerte ou vivante.

Les jeux du hasard sont inépuisables. Ils s'immiscent malicieusement dans la chaîne des causes et des effets. Ils introduisent l'accident là où l'on aimerait croire une

séquence inéluctable. Une branche de la mathématique s'est ainsi formée à vouloir dompter la bête capricieuse et ses aléas, cherchant à élucider et peut-être à maîtriser cette force obscure. Il s'agit alors de chiffrer le hasard et d'en énoncer les principes. Ainsi, le calcul des probabilités a développé concepts et méthodes pour le domestiquer.

Il n'est pas étonnant que cette science soit née de la fascination qu'exercent les jeux de hasard. C'est là une expression tellement familière de l'aléatoire. Il faut d'ailleurs se rappeler qu'*alea* en latin veut dire dé. *Alea jacta est*, déclarait Jules César en franchissant le Rubicon. Le sort en est jeté. Ou, plus littéralement, les dés sont jetés. C'est donc à partir d'un exercice ludique que le hasard est d'abord devenu objet d'étude rationnelle.

Ainsi, au dix-septième siècle, un célèbre joueur, le Chevalier de Méré, s'est questionné sur les probabilités reliées au jeu. Albert Jacquard résume ainsi le problème auquel s'était confronté ce joueur :

*Deux joueurs (disons Primus et Secundus) engagent trente-deux pistoles dans un jeu de pile ou face; empochera les soixante-quatre pistoles celui d'entre eux qui, le premier, aura obtenu 3 succès, consécutifs ou non. Ils jouent une première manche, et Primus gagne; ils sont à ce moment obligés de se séparer<sup>8</sup>, la partie ne sera jamais terminée. Comment partager équitablement l'enjeu entre eux?<sup>9</sup>*

Ce problème fut exposé à Pascal par le Chevalier de Méré. Pascal et un de ses contemporains, Pierre de Fermat, se sont penchés sur ce problème et lui ont apporté une solution loin d'être évidente à l'époque<sup>10</sup>. Le chevalier de Méré se ruinait au jeu de « passe-dix », car il supposait que le total des points obtenus en lançant trois dés équilibrés peut être douze avec

4. Ibid., p. 3

5. Cette hypothèse, écrit Monod, « [...] est la seule concevable, comme seule compatible avec les faits d'observation ou d'expérience ». Ibid., p. 148.

6. Monod distingue l'incertitude opérationnelle, celle que l'on observe dans les jeux de hasard, de l'incertitude essentielle qui se traduit par des « coïncidences absolues » résultant de la convergence imprévisible de chaînes causales. Ibid., p. 148-149.

7. L'inscription d'informations dans des structures d'une logique plus élaborée, d'une organisation plus profonde, exige un apport.

8. Imaginons qu'ils soient deux brigands et que les gendarmes s'approchent d'eux.

9. Albert Jacquard, *Les probabilités*, P.U.F., coll. Que sais-je?, 1992, p. 5.

10. Comme en témoigne incidemment une lettre de Pascal à Fermat. Lettre du 29 juillet 1654, citée par Albert Jacquard. Ibid., p. 6.

la même probabilité qu'il peut être onze. En réalité, si on joue avec des dés équilibrés, ces probabilités sont respectivement de 0,115741 et 0,125. C'est ainsi que les soucis de cet illustre joueur ont permis de jeter une base importante au calcul des probabilités, cette branche des mathématiques dont un des principaux objectifs est de décrire, voire de modéliser, le fonctionnement du hasard.

Pourtant, les aléas du dé (on nous pardonnera ce pléonasme bilingue) ont vite fait de nous montrer les limites de l'entreprise prévisionnelle qu'on pourrait imputer à une connaissance mathématique du hasard. Car l'indépendance des résultats dans une suite de lancers rend imprévisible le résultat d'un futur lancer. Plus précisément, en ce qui concerne une suite de lancers, le nombre de possibilités croît d'une manière exponentielle en fonction de la longueur de la suite. Autrement dit, si nous lançons un dé cent fois, il y aurait  $6^{100}$  résultats élémentaires possibles. C'est là un nombre dont l'ordre de grandeur n'a aucune mesure avec celui des nombres du quotidien. Quand nous lançons cent fois un dé, on observe un résultat élémentaire

parmi tous les  $6^{100}$  résultats élémentaires possibles. Une suite de cent lancers de dé peut donc être vue comme le début d'une infinité de suites infinies. Et les cents premières observations ne nous apprendraient rien sur les résultats à venir. On peut y voir une imprévisibilité complète.

Le hasard n'est pas pour autant synonyme d'absence de structure. Car les lois du hasard, paradoxalement, expriment aussi parfois un ordre profond. Elles lui font écho. Ainsi l'aiguille de Buffon fait d'un geste aléatoire l'expression d'une constante mathématique fondamentale, le nombre  $\pi$ , la constante bien connue reliant le diamètre d'un cercle à sa circonférence. Quelle incroyable chose que de laisser tomber une aiguille sur un sol marqué de droites parallèles, faire le décompte des occurrences d'un croisement et, à force de répétition, voir se préciser le nombre  $\pi$ .

En effet, si on répète l'expérience indéfiniment, la proportion de croisements oscille autour de  $2\ell/(\pi d)$ , où  $\ell$  est la longueur de l'aiguille et  $d$ , la distance entre les droites. La convergence est étonnante. Quelle rencontre inopinée! Et pourtant elle existe! pour paraphraser Galilée.

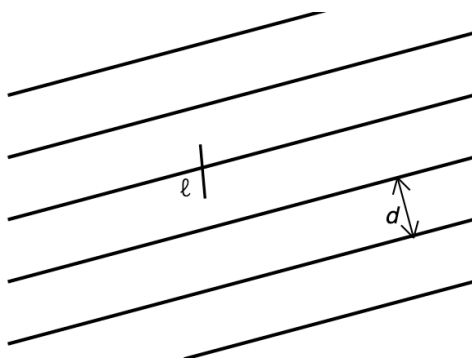


FIGURE 1 – L'aiguille de Buffon : illustration d'une loi du hasard révélant la constante  $\pi$ . Sur un plancher, on trace des droites parallèles de sorte que la distance entre deux droites consécutives soit toujours  $d$ . On lance, au hasard, indéfiniment une aiguille de longueur  $\ell$  tout en dénombrant le nombre de fois où l'aiguille croise une des droites. Au fur et à mesure que nous répétons ces lancers, la proportion de croisements se rapproche de  $2\ell/(\pi d)$ .

---

Globalement, la science se fonde de toutes manières sur la quête des constantes. Ce qu'on cherche à mettre en évidence, c'est ce qui demeure inchangé dans la profusion hétéroclite d'un monde en mouvement. Le calcul des probabilités aussi. Il cherche à isoler, quand la chose devient possible, ce que le hasard peut contenir de constant.

Initialement issues de l'observation des jeux de hasard, la statistique et les probabilités ont trouvé quelque deux cents ans plus tard une application assez inattendue en physique. La théorie des processus stochastiques et, par conséquent, celle des probabilités, en construisant des modèles du hasard et en formulant des lois statistiques, permettaient d'expliquer le développement de certains phénomènes physiques autrement incompréhensibles. Mais du jeu à la physique, le passage n'allait pas de soi. Voyons brièvement pourquoi.

Au dix-huitième siècle, Isaac Newton (1642–1727) voulait donner au mouvement des corps célestes des lois aussi précises que celle reliant le diamètre à la circonférence du cercle, bref d'énoncer des principes invariants, donnant ainsi jour à une physique déterministe. Cette physique est dite déterministe parce qu'elle repose sur le postulat suivant : *connaissant l'état d'un système à un instant donné, on peut prévoir dans quel état il sera dans un futur donné*. Ainsi, si cette physique pouvait s'appliquer à toutes les échelles, aux dires de Pierre Simon Laplace (1749–1827), autre fondateur de cette mécanique, un démon connaissant la position et le mouvement de tous les atomes serait en mesure de déterminer tout l'avenir de l'univers.

Or, au contraire, ce déterminisme s'est peu à peu montré incapable d'expliquer les phénomènes existant à l'échelle de l'infiniment petit. Par exemple, l'impossibilité d'indiquer simultanément, à volonté et exactement, la position et la vitesse d'une particule atomique, problème sur lequel Max Planck s'était penché, a forcé l'introduction du hasard dans la physique contemporaine. Évidemment, cela ne pouvait pas plaire à tous. À ce propos, Einstein

écrivait à Max Born (1882-1970) : « *Je ne me satisfais pas à l'idée que l'on possède une machinerie qui permette de prophétiser, mais à laquelle on est incapable de donner un sens clair.* » En affirmant de plus que « *Dieu ne joue pas aux dés,* » Einstein signifiait aussi à Born qu'il ne pouvait se résoudre à accepter que les lois statistiques soient des lois fondamentales de la physique. C'était là, bien sûr, une position philosophique. Dans une lettre à Solovine, Einstein écrivait :

*Du point de vue de l'expérience immédiate, il n'y a pas de déterminisme exact. À cet égard, l'accord est parfait. La question est de savoir si la description théorique de la nature doit, oui ou non, être déterministe. Au-delà se pose en particulier la question de savoir s'il existe généralement une image conceptuelle de la réalité (pour le cas isolé), image qui est en principe complètement exempte de la statistique. À ce sujet, seules les opinions diffèrent.*<sup>11</sup>

Sur le plan philosophique, la position déterministe présuppose une attitude transcendantaliste : l'exigence « d'un sens clair » pour reprendre les mots d'Einstein, d'un mouvement transcendant. La position probabiliste, quant à elle, relève d'une attitude sceptique. Le hasard est dérangent. Il questionne le modèle téléologique<sup>12</sup>, il bouleverse le déterminisme qui donne sens aux événements. Mais il demeure néanmoins essentiel à la construction d'une représentation opérationnelle du monde.

En ce qui concerne l'apparition de la vie et l'émergence de la pensée humaine, l'attitude sceptique compte désormais de nombreux partisans. Stephen J. Gould, par exemple, dans l'Éventail du vivant, le mythe du progrès, adopte résolument cette position qu'il résume ainsi :

*À l'échelle des temps géologiques, [...] peut-être [...] ne sommes-nous pas le résultat prévisible d'un processus fondamentalement progressif (la fameuse tendance au progrès dans l'histoire de la vie); peut-être sommes-nous, quels que soient nos titres de gloire et nos accomplissements, un éphémère accident cosmique qui ne se reproduirait pas si l'on replantait la graine de vie en la laissant se*

11. Albert Einstein, *Lettres à Maurice Solovine*. Paris, GauthierVillars, 1950, p. 99.

12. Monod attribue à la téléonomie foncière du système nerveux central cet appétit de déterminisme. L'hypothèse est intéressante.

*développer dans des conditions similaires.*<sup>13</sup>

Que le hasard soit seul moteur de l'existence d'une goutte d'eau ne nous émeut pas outre mesure. Mais il en va tout autrement quand chacun d'entre nous considère sa propre existence. Se percevoir comme simple aléa, comme simple produit d'événements sans dessein restera toujours source d'angoisse. En fait la pensée religieuse et toute forme de pensée animiste, qui installe dans la matière l'écriture d'un projet, répond au besoin d'apaiser l'anxiété provoquée par cette perte de sens. « Nous nous voulons nécessaires, inévitables ordonnés de tout temps », écrivait Jacques Monod. « Toutes les religions, presque toutes les philosophies, une partie même de la science, témoignent de l'inlassable, héroïque effort de l'humanité niant désespérément sa propre contingence »<sup>14</sup> D'où ce rejet viscéral du hasard. D'où son infortune.

Ce rapide tour d'horizon des paradoxes, de la fortune et de l'infortune du hasard nous fournit quelques repères pour maintenant porter la discussion, en conclusion, sur un autre plan : c'est-à-dire au plan social. Car depuis plusieurs années, au Québec, le hasard agit au cœur d'un formidable phénomène de société. La loterie occupe maintenant une place incroyable parmi nos rituels sociaux. Rituel tellement célébré, quotidiennement, télévisuellement, le loto est partout. Chaque jour on se rue vers les machines à valider, on gratte à qui mieux mieux. On gratte partout d'ailleurs. À l'épicerie pour une aubaine de trois sous. Dans les grands magasins où le rituel maniaque du grattage remplace le solde unique et franc d'antan. Partout, on cherche à nous vendre des billets : « Une mini avec ça ? Un 6/49 pour le tirage de ce soir ? » Le hasard fait fortune.

Le phénomène a pris une telle ampleur qu'il vaut la peine de s'y arrêter. D'autant plus qu'il s'agit d'un lucratif monopole d'État.

Défier le hasard en jouant au loto, c'est implorer une force occulte pour qu'elle nous accorde la grâce de la richesse, du confort et du bien-être. Celui qui achète

ses billets espère, implore la bienveillance du hasard. Il y a là une espèce de déification du hasard. Une nouvelle providence a ainsi vu le jour. Chaque acheteur de billet espère qu'il y a par hasard, quelque part, une force bienveillante qui dirigera la cagnotte vers lui. On croit au hasard, ce nouveau pourvoyeur à la portée de toutes les bourses, socialement et moralement accepté. Et la croyance échappe au rationnel. Car en toute rationalité personne ne peut jouer, la probabilité d'un gain est insignifiante. Les statisticiens se tuent à le dire. Pour acheter son billet il faut qu'agisse, aussi ténue soit-elle, une forme de croyance. Nommons-la : espoir. Espoir en qui ? Espoir en quoi ? Nommons-le : hasard. En langage freudien, le hasard serait devenu projection de l'image parentale. Le divin hasard.

L'État ne veut plus être providence. On nous l'a dit souvent. On nous le dit sans cesse. L'État se retire de plus en plus des services sociaux. Les usagers des casinos sont mille fois mieux traités que ceux de nos hôpitaux. Il est troublant de constater que ce retrait de la fonction providentielle s'accompagne d'un curieux mouvement où l'État s'engage dans une gestion exclusive et lucrative du hasard. De l'État providence, nous sommes passés à l'État loterie. Le sort des concitoyens les plus démunis semble avoir été simplement remis entre les mains du dieu Hasard.

L'origine de la conception moderne de l'État, on le sait, est issue du Siècle des Lumières. L'État se donnait alors pour mission de régler les rapports sociaux sur le principe de la liberté, de l'égalité et de la fraternité. Partager plus équitablement la richesse était, entre autres, son devoir. En outre, la rationalité déterministe prend racine dans ce siècle. Et c'est au nom d'une telle rationalité que l'ordre social était repensé. Que faut-il penser alors d'un État qui semble vouloir confier au divin hasard la redistribution des richesses ?

La loterie restera une formule inéquitable de taxation. On arguera que le joueur est libre de ses actes, libre de jouer ou de s'en abstenir. Oui, bien sûr ! Mais ce

13. Stephen J. Gould, *L'Éventail du vivant. Le mythe du progrès*, Paris, Le Seuil, 1997, p. 30.

14. Jacques Monod, *op. cit.* p. 63.

serait oublier que l'indigence et l'insécurité, appuyées d'une bonne dose de crédulité, peuvent entraver sérieusement le plein exercice de cette liberté. Au lieu d'imposer les individus et les corporations selon leurs revenus ou leurs profits, mesure toujours très impopulaire, l'État préfère laisser jouer les forces du hasard, de la détresse et du rêve pour garnir ses coffres. Un système ludique de taxation se met sournoisement en place. On ne paie pas de taxes, on joue ! Si au moins la couleur était franche. Imaginons par exemple ces slogans : « Contribuez en vous amusant ! Contribuez en rêvant ! Contribuez en oubliant que vous contribuez ! Contribuez sans vous sentir responsables ! ... » La part du jeu efface celle des responsabilités, celles de l'État et celles des citoyens, pardon ! des contribuables comme il faut dire aujourd'hui.

Cette portion du réel que l'on nomme le social peut-elle légitimement s'en remettre à l'empire de l'aléa ? L'ère postmoderne marquerait, dit-on, la fin des grands récits. Le développement phénoménal des jeux de hasard et des casinos en serait-il un autre signe ? L'État perd le sens de sa finalité et ainsi se fait postmoderne, sceptique et probabiliste. Gouverner selon des données statistiques et instituer le hasard en maître d'œuvre de la destinée des membres d'une société, exprime une troublante tendance quand l'État doit chercher à repenser sa fonction et redéfinir l'instrumentation d'un pouvoir qu'il détient de droit. Il serait donc utile de ne pas perdre de vue que la statistique et la probabilité sont des outils. Et non un principe de gouvernement. Coïncidence ?

*Pauvre Hasard qui subit encore une infortune.*

## A Considérations mathématiques

Considérons l'expérience classique proposée par Buffon au XVIII<sup>e</sup> siècle. On dispose d'un plan portant un réseau de droites parallèles distantes de  $d$ , et l'on lance au hasard une aiguille de longueur  $\ell$ , avec la condition  $\ell \leq d$ . La question posée est la suivante : quelle est la probabilité qu'une aiguille donnée coupe l'une des droites du réseau ?

Pour modéliser cette expérience, il nous faut décrire deux éléments : la position de l'aiguille et son orientation. Parmi les conventions possibles, une approche particulièrement naturelle consiste à supposer que

1. le centre de gravité de l'aiguille se déplace uniformément dans la bande fondamentale  $[0, d]$  située entre deux droites successives ;
2. l'angle que fait l'aiguille avec la direction des droites est choisi uniformément dans l'intervalle  $[0, \pi]$ .

Autrement dit, nous posons

$$X \sim \mathcal{U}[0, d], \quad \Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi],$$

et nous supposons que  $X$  et  $\Theta$  sont indépendants.

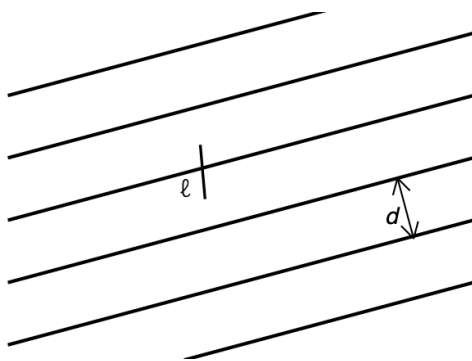


FIGURE 2 – L'aiguille de Buffon : illustration d'une loi du hasard révélant la constante  $\pi$ .

Sur un plancher, on trace des droites parallèles de sorte que la distance entre deux droites consécutives soit toujours  $d$ . On lance, au hasard, indéfiniment une aiguille de longueur  $\ell$  tout en dénombrant le nombre de fois où l'aiguille croise une des droites. Au fur et à mesure que nous répétons ces lancers, la proportion de croisements se rapproche de  $2\ell / (\pi d)$ .

Cette modélisation reflète fidèlement la nature du dispositif. En effet, toutes les positions du centre dans la bande  $[0, d]$  sont a priori équivalentes, de même que toutes les orientations possibles de l'aiguille entre 0 et  $\pi$ . La symétrie du problème justifie pleinement ces choix : un décalage ou une rotation globale de la configuration ne modifie pas l'expérience.

En effet, ces choix sont justifiés par les symétries du dispositif. En effet, si l'on translate verticalement l'aiguille, on ne modifie pas l'expérience : toutes les bandes de largeur  $d$  déterminées par les droites du réseau sont identiques. La seule information pertinente est donc la position du centre modulo  $d$ , ce qui conduit à considérer  $X$  uniforme sur  $[0, d]$ .

De même, si l'on effectue une rotation globale du dispositif (aiguille et réseau ensemble),

l'angle relatif entre l'aiguille et les droites reste inchangé. L'expérience dépend uniquement de cet angle relatif, ce qui justifie de modéliser  $\Theta$  comme uniforme sur  $[0, \pi]$ .

Introduisons maintenant la condition géométrique permettant de déterminer si une aiguille donnée coupe ou non l'une des droites du réseau. Pour un lancer fixé, la projection perpendiculaire d'une demi-aiguille de longueur  $\ell/2$  vaut

$$\frac{\ell}{2} |\sin \Theta|.$$

Si  $X$  désigne la distance du centre de l'aiguille à la droite du bas de la bande fondamentale, alors les distances des deux extrémités de l'aiguille à cette même droite sont

$$X - \frac{\ell}{2} |\sin \Theta| \quad \text{et} \quad X + \frac{\ell}{2} |\sin \Theta|.$$

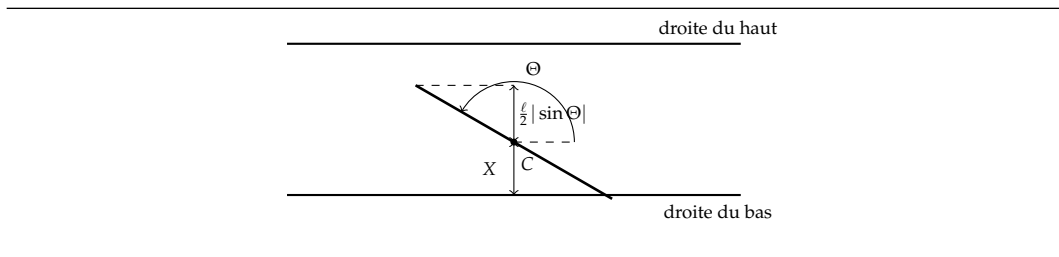


FIGURE 3 – Projection perpendiculaire d’une demi-aiguille :  $\frac{\ell}{2} |\sin \Theta|$ .

L’aiguille coupe une droite si et seulement si l’une de ces extrémités sort de la bande  $[0, d]$ , c’est-à-dire lorsque

$$X \leq \frac{\ell}{2} |\sin \Theta| \quad \text{ou} \quad X \geq d - \frac{\ell}{2} |\sin \Theta|.$$

Fixons  $\Theta = \theta$ . L’ensemble favorable des valeurs de  $X$  est alors

$$\left[0, \frac{\ell}{2} |\sin \theta|\right] \cup \left[d - \frac{\ell}{2} |\sin \theta|, d\right],$$

dont la longueur totale vaut  $\ell |\sin \theta|$  dès que  $\ell \leq d$ . Comme  $X$  est uniforme sur  $[0, d]$ , la pro-

babilité conditionnelle de croisement s’écrit

$$\Pr(\text{croisement} \mid \Theta = \theta) = \frac{\ell}{d} |\sin \theta|.$$

En intégrant sur  $\Theta$  uniforme sur  $[0, \pi]$ , on obtient la probabilité de croisement recherchée :

$$p = \int_0^\pi \frac{\ell}{d} |\sin \theta| \frac{1}{\pi} d\theta = \frac{\ell}{\pi d} \int_0^\pi |\sin \theta| d\theta = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Cette modélisation simple et symétrique conduit ainsi à la formule classique de Buffon pour la probabilité qu’une aiguille coupe l’une des droites du réseau.

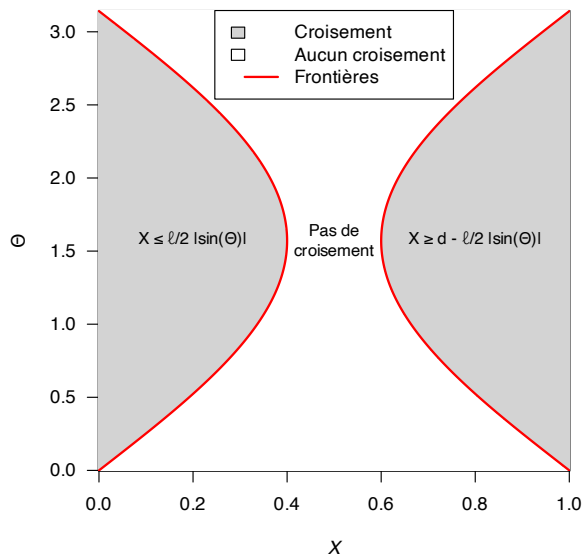


FIGURE 4 – La région en gris correspond aux différentes valeurs de  $X$  et  $\Theta$  donnant lieu à un croisement. À gauche :  $\{(X, \Theta) : X \leq \frac{\ell}{2} |\sin \Theta|\}$  et à droite :  $\{(X, \Theta) : X \geq d - \frac{\ell}{2} |\sin \Theta|\}$ . Noter que la densité de probabilité est uniforme sur le rectangle.

## Une modélisation réduite par symétrie

La description précédente repose sur la modélisation naturelle

$$X \sim \mathcal{U}[0, d], \quad \Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi],$$

où  $X$  représente la position du centre de l'aiguille dans la bande fondamentale et  $\Theta$  son orientation complète. Cette modélisation est simple et intuitive. Cependant, les fortes symétries du problème permettent d'aller plus loin et de réduire encore les intervalles considérés pour  $X$  et  $\Theta$  sans changer le résultat.

Commençons par la position du centre. Les bandes formées par les droites sont toutes identiques par translation verticale. Si l'on observe une aiguille dans la bande  $[d/2, d]$ , on peut la rabattre vers le bas en utilisant la symétrie par réflexion autour du milieu de la bande. Les configurations obtenues sont indiscernables pour notre expérience : seul compte le fait que l'extrémité supérieure ou inférieure de l'aiguille franchisse une droite. Ainsi, toute position du centre dans  $[0, d]$  peut être ramenée dans la demi-bande  $[0, d/2]$  sans perte d'information statistique. Il est donc légitime de travailler avec la modélisation réduite

$$X \sim \mathcal{U}[0, d/2].$$

La même idée vaut pour l'angle. Dans la modélisation complète,  $\Theta$  décrit une orientation comprise entre 0 et  $\pi$ . Or les configurations correspondant aux angles  $\theta$  et  $\pi - \theta$  sont

parfaitement symétriques : l'aiguille coupe les droites dans exactement les mêmes situations. Par conséquent, l'orientation pertinente peut être ramenée dans  $[0, \pi/2]$ . Toute orientation dans  $[\pi/2, \pi]$  peut être réfléchiée par symétrie, ce qui conduit au modèle réduit

$$\Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi/2].$$

En résumé, les symétries du dispositif permettent de remplacer la modélisation naturelle par une modélisation équivalente, définie sur des intervalles réduits :

$$X \sim \mathcal{U}[0, d/2], \quad \Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi/2],$$

avec indépendance entre  $X$  et  $\Theta$ . Cette version restreinte est utilisée classiquement dans l'étude de l'expérience de Buffon : elle simplifie certains calculs tout en conservant strictement la même structure probabiliste que la modélisation complète.

### Probabilité de croisement dans le modèle réduit

Dans cette nouvelle modélisation, nous travaillons avec

$$X \sim \mathcal{U}[0, d/2], \quad \Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi/2],$$

et  $X$  et  $\Theta$  sont supposées indépendantes.

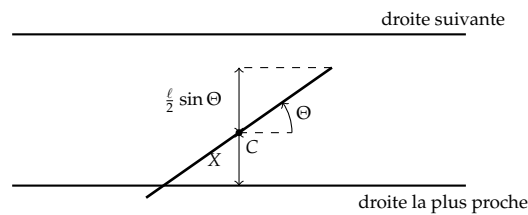


FIGURE 5 – Condition de croisement :  $X \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta$ .

La condition géométrique de croisement ne change pas : l'aiguille coupe une droite si et seulement si la projection perpendiculaire d'une demi-aiguille dépasse la distance  $X$  entre le centre et la droite parallèle la plus proche. Autrement dit, le croisement se produit si et seulement si

$$X \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta.$$

Fixons d'abord l'angle  $\Theta = \theta$ , avec  $0 \leq \theta \leq$

$\pi/2$ . Sachant cette valeur de  $\Theta$ , la variable  $X$  reste uniforme sur l'intervalle  $[0, d/2]$ . L'événement

$$\left\{ X \leq \frac{\ell}{2} \sin \theta \right\}$$

correspond donc à un simple sous-intervalle de  $[0, d/2]$ .

Sous l'hypothèse  $\ell \leq d$ , on a

$$\frac{\ell}{2} \sin \theta \leq \frac{\ell}{2} \leq \frac{d}{2},$$

de sorte que l'intervalle favorable est bien contenu dans  $[0, d/2]$ . La probabilité conditionnelle de croisement, pour un angle fixé  $\theta$ , est alors donnée par le rapport des longueurs :

$$\Pr\left(X \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta \mid \Theta = \theta\right) = \frac{\frac{\ell}{2} \sin \theta}{d/2} = \frac{\ell}{d} \sin \theta.$$

Pour obtenir la probabilité totale de croisement, il reste à intégrer cette probabilité conditionnelle par rapport à la loi de  $\Theta$ . Dans le modèle réduit,  $\Theta$  est uniforme sur  $[0, \pi/2]$ , sa densité vaut donc  $2/\pi$  sur cet intervalle. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} p &= \Pr(\text{croisement}) \\ &= \int_0^{\pi/2} \Pr\left(X \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta \mid \Theta = \theta\right) \frac{2}{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\ell}{d} \sin \theta \frac{2}{\pi} d\theta \\ &= \frac{2\ell}{\pi d} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

## Proportion de croisements observée

Intéressons-nous maintenant à la proportion de croisements observée. Pour chaque lancer  $k, k = 1, \dots, n$ , introduisons la variable indicatrice

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{si l'aiguille coupe une droite,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque  $I_k$  suit une loi de Bernoulli( $p$ ), et les variables sont indépendantes. La proportion de croisements après  $n$  lancers s'écrit donc

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k.$$

D'après la loi forte des grands nombres, cette proportion converge presque sûrement vers

$$p = \frac{2\ell}{\pi d}$$

lorsque  $n$  devient très grand. Autrement dit, plus on multiplie les lancers, plus la proportion observée  $\hat{p}_n$  se rapproche de sa valeur théorique.

Cette relation permet d'estimer le nombre  $\pi$  lui-même en posant

$$\hat{\pi}_n = \frac{2\ell}{\hat{p}_n d}.$$

À la page suivante, la figure 6 illustre l'évolution de l'estimateur  $\hat{\pi}_n$  pour  $n = 1, \dots, 400$ . On constate que la convergence vers  $\pi$  existe

Or

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1,$$

ce qui donne finalement

$$p = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

On retrouve donc exactement la même probabilité de croisement que dans le modèle complet avec

$$X \sim \mathcal{U}[0, d], \quad \Theta \sim \mathcal{U}[0, \pi].$$

Le passage au modèle réduit  $X \in [0, d/2]$  et  $\Theta \in [0, \pi/2]$  ne fait qu'exploiter davantage les symétries du problème, sans modifier le résultat numérique : il simplifie les intervalles de travail tout en conservant la même structure probabiliste.

bien, mais qu'elle reste assez lente : il faut un très grand nombre de lancers pour obtenir une estimation précise.

Il existe toutefois une méthode plus efficace pour approcher  $\pi$ . Elle consiste à choisir des points au hasard dans le carré  $[0;1] \times [0;1]$  et à compter la proportion de ceux dont la coordonnée en  $y$  est inférieure à  $\sqrt{1-x^2}$ . Cette proportion approche alors  $\pi/4$ , puisque l'aire du disque unité vaut  $\pi$ .

## Vitesses de convergence pour deux estimateurs de $\pi$

Nous considérons deux méthodes de simulation permettant d'estimer la valeur de  $\pi$ .

### Méthode de Buffon

Dans l'expérience de Buffon, on jette une aiguille de longueur  $\ell$  sur un plan muni d'un réseau de droites parallèles distantes de  $d$ . Dans le cas classique où  $\ell \leq d$ , on montre que la probabilité  $p$  que l'aiguille coupe une droite est

$$p = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas particulier  $\ell = d = 1$ , de sorte que

$$p = \frac{2}{\pi}.$$

Pour chaque lancer  $k, k = 1, \dots, n$ , on introduit la variable indicatrice

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{si l'aiguille coupe une droite,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables  $I_1, \dots, I_n$  sont indépendantes et de même loi, avec

$$\mathbb{P}(I_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(I_k = 0) = 1 - p,$$

c'est-à-dire qu'elles suivent une loi de Bernoulli( $p$ ).

La proportion de croisements après  $n$  lancers est donnée par

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k.$$

D'après la loi forte des grands nombres, on a

$$\hat{p}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} p.$$

La vitesse de convergence est décrite par le théorème central limite :

$$\sqrt{n} (\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

Pour estimer  $\pi$ , on utilise la relation

$$\pi = \frac{2\ell}{p\bar{d}'},$$

et l'on définit donc l'estimateur

$$\hat{\pi}_n = \frac{2\ell}{\hat{p}_n \bar{d}'},$$

Dans le cas  $\ell = d = 1$ , cela se réduit à

$$\hat{\pi}_n = \frac{2}{\hat{p}_n}.$$

### Méthode géométrique par l'aire du disque unité

Considérons maintenant la méthode suivante. On tire des points

$$(X_k, Y_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

indépendants et uniformes sur le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . On s'intéresse à la région située sous le quart de disque de rayon 1, c'est-à-dire à l'ensemble des points vérifiant

$$Y_k \leq \sqrt{1 - X_k^2}.$$

On introduit la variable indicatrice

$$J_k = \begin{cases} 1, & \text{si } Y_k \leq \sqrt{1 - X_k^2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut réécrire

$$\hat{\pi}_n = g(\hat{p}_n) \quad \text{avec} \quad g(u) = \frac{2}{u}.$$

En appliquant le théorème delta au voisinage de  $p = 2/\pi$ , on obtient

$$\sqrt{n} (\hat{\pi}_n - \pi) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_B^2),$$

où

$$\sigma_B^2 = (g'(p))^2 p(1-p).$$

Or

$$g'(u) = -\frac{2}{u^2}, \quad g'(p) = -\frac{2}{p^2},$$

et, avec  $p = 2/\pi$ , un calcul élémentaire donne

$$p(1-p) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{2(\pi-2)}{\pi^2}$$

et

$$\sigma_B^2 = \frac{\pi^2(\pi-2)}{2}.$$

En résumé, pour la méthode de Buffon (avec  $\ell = d = 1$ ), on a

$$\text{Var}(\hat{\pi}_n) \sim \frac{\sigma_B^2}{n} = \frac{\pi^2(\pi-2)}{2n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

L'erreur typique (écart-type) est donc de l'ordre de

$$\frac{\sqrt{\pi^2(\pi-2)/2}}{\sqrt{n}} \approx \frac{2,37}{\sqrt{n}}.$$

Autrement dit, la vitesse de convergence est en  $1/\sqrt{n}$ , avec une constante multiplicative relativement grande.

La probabilité que  $(X_k, Y_k)$  appartienne à ce quart de disque est égale à l'aire de cette région, soit

$$p_D = \frac{\pi}{4}.$$

Les variables  $J_k$  sont donc indépendantes et suivent une loi de Bernoulli( $p_D$ ).

La proportion empirique de points tombant dans le quart de disque est

$$\hat{p}_n^{(D)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n J_k.$$

D'après la loi forte des grands nombres,

$$\hat{p}_n^{(D)} \longrightarrow p_D = \frac{\pi}{4} \quad (\text{presque sûrement}),$$

et le théorème central limite donne

$$\sqrt{n} (\hat{p}_n^{(D)} - p_D) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p_D(1-p_D)).$$

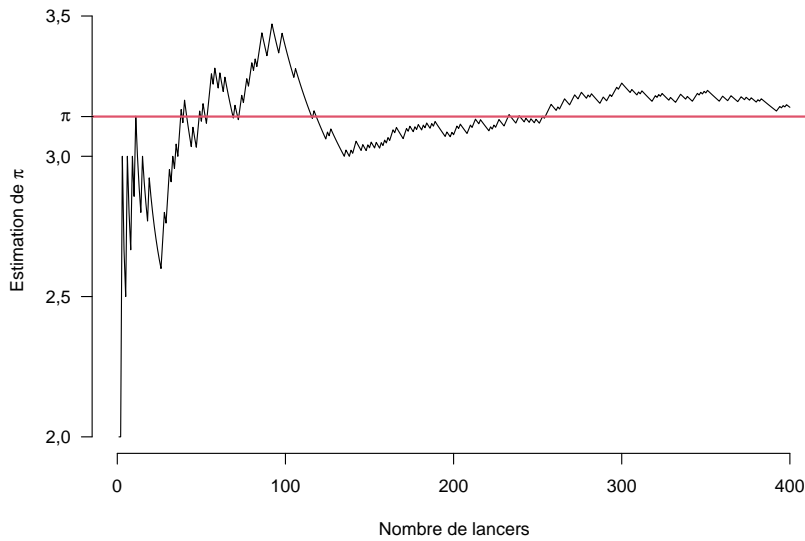


FIGURE 6 – L’aiguille de Buffon : illustration d’une loi du hasard révélant la constante  $\pi$ .

On répète l’expérience de Buffon  $n$  fois. Après chaque expérience, on évalue  $\hat{\pi}_n$ . On peut alors faire le graphique de  $\hat{\pi}_n$  en fonction de  $n$ . Ce graphique peut effectivement suggérer que  $\hat{\pi}_n$  se rapproche de  $\pi$ .

Comme  $\pi = 4p_D$ , on définit l’estimateur

$$\tilde{\pi}_n = 4\hat{p}_n^{(D)}.$$

Il s’agit ici d’une simple transformation linéaire de  $\hat{p}_n^{(D)}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\tilde{\pi}_n - \pi) &= 4\sqrt{n}(\hat{p}_n^{(D)} - p_D) \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_D^2), \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_D^2 = 16p_D(1 - p_D).$$

En remplaçant  $p_D$  par  $\pi/4$ , on obtient

$$\sigma_D^2 = 16 \cdot \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi(4 - \pi).$$

Ainsi, pour la méthode géométrique basée sur l’aire du disque unité,

$$\text{Var}(\tilde{\pi}_n) \sim \frac{\sigma_D^2}{n} = \frac{\pi(4 - \pi)}{n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

et l’erreur typique est de l’ordre de

$$\frac{\sqrt{\pi(4 - \pi)}}{\sqrt{n}} \approx \frac{1,64}{\sqrt{n}}.$$

### Comparaison des deux méthodes

Dans les deux cas, les estimateurs de  $\pi$  sont des fonctions de moyennes de variables de Bernoulli indépendantes. Ils vérifient donc un théorème central limite, ce qui se traduit par une vitesse de convergence en

$$\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La différence entre les deux méthodes se manifeste dans la constante multiplicative devant  $1/\sqrt{n}$ .

Pour l’expérience de Buffon (avec  $\ell = d = 1$ ), on a asymptotiquement

$$\text{Var}(\hat{\pi}_n) \approx \frac{\pi^2(\pi - 2)}{2n}$$

et l’erreur standard est  $\approx \frac{2,37}{\sqrt{n}}$ .

Pour la méthode géométrique par tirage de points dans le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,

$$\text{Var}(\tilde{\pi}_n) \approx \frac{\pi(4 - \pi)}{n}$$

et l’erreur standard est  $\approx \frac{1,64}{\sqrt{n}}$ .

Il est instructif de comparer directement les deux variances asymptotiques. Pour la méthode

de Buffon (avec  $\ell = d = 1$ ), on a

$$\sigma_B^2 = \frac{\pi^2(\pi - 2)}{2},$$

tandis que, pour la méthode géométrique basée sur l'aire du disque unité,

$$\sigma_D^2 = \pi(4 - \pi).$$

Le rapport

$$R = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_D^2} = \frac{\pi(\pi - 2)}{2(4 - \pi)} \approx 1,84,$$

montre que la variance de l'estimateur de Buffon est presque deux fois plus grande que celle obtenue par la méthode géométrique. Autrement dit, pour une même précision, l'expérience de Buffon nécessite environ 1,8 fois plus de simulations que la méthode fondée sur le tirage de points dans le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Les deux estimateurs ont donc la même vitesse de convergence en  $1/\sqrt{n}$ , mais la méthode basée sur l'aire du disque unité est nettement plus efficace : à nombre de tirages égal, elle fournit en moyenne une estimation de  $\pi$  sensiblement plus précise que celle obtenue avec l'expérience de Buffon.