C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 417–422, 2001
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Le stade ne minimise pas λ_2 parmi les ouverts convexes du plan

Antoine HENROT [a], Edouard OUDET [b]

[a] Institut Élie-Cartan Nancy, Université Nancy-I, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
[b] Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
Courriel : henrot@iecn.u-nancy.fr; oudet@irmasrv1.u-strasbg.fr

(Reçu le 23 janvier 2001, accepté le 29 janvier 2001)

Résumé. Nous nous intéressons, dans cette Note, à la minimisation de la deuxième valeur propre du Laplacien, avec condition de Dirichlet, parmi les ouverts convexes du plan d'aire donnée. Le candidat naturel à être le minimum était le « stade » enveloppe convexe de deux boules identiques tangentes (conjecture de Troesch). Nous réfutons cette conjecture. Nous montrons néanmoins que l'ouvert optimal possède sur son bord deux segments parallèles.

The stadium does not minimize λ_2 amongst convex plane domains

Abstract. *In this Note, we are interested in the minimization of the second eigenvalue of the Laplacian with Dirichlet boundary conditions amongst convex plane domains with given area. The natural candidate to be the optimum was the "stadium", convex hull of two identical tangent disks* (*Troesch conjecture*)*. We refute this conjecture. Nevertheless, we prove that the optimum has two parallel segments in its boundary.*

Abridged English version

Let Ω be a bounded open subset in the plane and let us denote by $0 < \lambda_1(\Omega) \leqslant \lambda_2(\Omega) \leqslant \lambda_3(\Omega) \cdots$ its eigenvalue for the Laplacian operator with homogeneous Dirichlet boundary condition. Problems of minimization of eigenvalues, or combination of eigenvalues, brought about many deep works since the early part of the twentieth century. It was indeed in the 1920's that Faber [5] and Krahn [8] solved the well-known Rayleigh's conjecture: the ball minimizes λ_1 amongst every open sets of given measure. The same question for λ_2 was solved (to our knowledge) by Szegö, *cf.* [11], thanks to a smart proof using the nodal domains of the second eigenfunction and the Faber–Krahn inequality (it seems nevertheless that the result was already contained in one of the paper of Krahn): the open set which minimizes λ_2 is the union of two identical balls. Looking for the minimizer of λ_2 amongst *connected* domains has no solutions. Actually, it is easy to see that the domain obtained by joining the two balls with a thin pipe γ-converges to the two balls

Note présentée par Yves MEYER.

S0764-4442(01)01864-X/FLA

when the radius of the pipe goes to 0. Therefore, its second eigenvalue converges to the second eigenvalue of the two balls, so the infimum is not achieved.

Now, the problem becomes again interesting if we ask the question to find the *convex* domain, of given area, which minimizes λ_2. In a paper of 1973, Troesch [14] did some numerical experiments which led him to conjecture that the solution was *a stadium*: convex hull of two identical tangent disks. It is actually the convex domain which is the closer to the solution without constraints. In this paper, we refute this conjecture:

THEOREM 1. – *The stadium, convex hull of two identical tangent disks, does not realize the minimum of λ_2 amongst plane convex domains of given area.*

The proof simply consists in verifying that the optimality condition could not be satisfied by the stadium Ω. Indeed, the second eigenfunction u of the optimal domain must satisfy $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{constant}$ on the strictly convex parts of the boundary. Now, we put the origin at the center of one circle and we introduce the function $w(x,y) = x\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial x}$. Then, we verify that:

(i) $-\Delta w = \lambda_2 w$ in Ω;

(ii) $w = 0$ and $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ on the corresponding half circle located on the boundary.

Now, we conclude, using Holmgren uniqueness theorem, that w must be 0 in a neighbourhood of the half-circle, so in the whole domain by analyticity. This lead to a contradiction because u would be radially symmetric in one of the disks.

Let us remark that this idea also gives an answer to a question set by Giuseppe Buttazzo: if we minimize $\lambda_1(\Omega)$ amongst open sets Ω of given area c, contained in a fixed box D and if D is too small to contain a ball of area c, do the free parts of the boundary of Ω are pieces of spheres? The answer is no, using the same argument.

Now, if the stadium is not a minimizer for λ_2, it seems that the real minimizer probably looks like a stadium. Some numerical experiments which will appear in Oudet [10] confirms that fact. Moreover, we can prove the following.

THEOREM 2. – *There exists at least one convex domain Ω^* which minimizes λ_2 amongst plane convex domains with given area. Moreover, if we assume Ω^* to be regular enough* (*at least of class* $\mathrm{C}^{1,1}$) *and if we assume λ_2 to be a simple eigenvalue, then Ω^* has two straight lines in its boundary and these lines are parallels.*

The complete proof of this result will appear in [6]. The steps are the following:

- existence is proved for example in Cox–Ross [4] (we can also use the classical method of calculus of variations together with some γ-convergence argument);
- there is at least one straight line on the boundary, otherwise the normal derivative of u would be zero on the whole boundary, because it is constant (by optimality condition) and it has to be zero where the nodal line hits the boundary. It is easy to see that it is impossible, e.g., using one more time Holmgren uniqueness argument;
- there are at least two straight lines on the boundary, otherwise the nodal line would have to close on the same straight line and we could adapt an idea of Melas [9] to reach a contradiction;
- there are at most two straight lines on the boundary, otherwise we consider the segment $\mathcal{S}$ in the boundary which does not meet the nodal line. We put it horizontal and we introduce the auxiliary eigenfunction $v_t = tu + \frac{\partial u}{\partial x}$. Thanks to the optimality condition on segments, we prove that this function has at least three nodal lines starting on $\mathcal{S}$ for t small. Then, we reach a contradiction by letting t increasing up to a critical value where v_t would have all its derivatives which vanish up to the second order at some point and therefore everywhere;
- the two segments have to be parallel. Otherwise, we put one segment horizontal. We still consider the same function v_t and we look at its nodal lines. We let now t go to $+\infty$ and reach a contradiction at

the point where the nodal line of u hits the other segment: the derivatives of u have to vanish up to the second order at that point which is impossible.

The next step would probably consist in proving that the optimal domain has two axis of symmetry. We do not yet succeed in proving such a result.

For other problems related to minimization of eigenvalues for the Laplacian-Dirichlet, we refer, e.g., to Bucur–Henrot [2] where is proved that there exists a (quasi-) open set which minimizes λ_3, Buttazzo–Dal Maso [3] where is proved existence of an optimal (quasi-) open set for every eigenvalues, but with a supplementary assumption: the sets are constrained to lie in a fixed box. See also, Henrot–Pierre [7] for some open problems in that question.

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné du plan, dans toute la suite, nous noterons $0 < \lambda_1(\Omega) \leqslant \lambda_2(\Omega) \leqslant \lambda_3(\Omega) \cdots$ les valeurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet sur Ω. Les problèmes qui relient la forme d'un domaine à la suite de ses valeurs propres ou à certaines d'entre elles sont parmi les plus attrayants de l'analyse mathématique ou de la géométrie différentielle. Parmi ceux-ci les questions consistant à chercher le ou les ouverts qui minimisent une valeur propre ou une combinaison de valeurs propres (parmi des ouverts de mesure donnée) ont suscité des travaux très intéressants depuis les années 1920. C'est en effet à cette époque que Faber [5] et Krahn [8] résolvèrent la conjecture de Rayleigh : c'est la boule qui minimise λ_1 parmi tous les ouverts de mesure donnée. La même question pour λ_2 fut résolue (à notre connaissance) par Szegö, *cf.* [11] grâce à un joli raisonnement sur les ensembles nodaux de la deuxième fonction propre et l'utilisation de l'inégalité de Faber–Krahn : l'ouvert qui minimise λ_2 est la réunion de deux boules identiques (il semble néanmoins que ce résultat était déjà dans l'un des papiers de Krahn). Chercher à minimiser λ_2 parmi les ouverts *connexes* n'a malheureusement pas de solution, car si on joint les deux boules par un très fin tuyau, il est facile de voir que l'ouvert ainsi obtenu γ-converge vers les deux boules quand l'épaisseur du tuyau tend vers 0. Ainsi, sa deuxième valeur propre converge vers celle des deux boules et l'infimum dans le cas d'ouverts connexes est donc le même que sans contrainte de connexité et il n'est pas atteint.

En revanche, le problème redevient intéressant si on se pose la question de trouver l'ouvert *convexe* qui minimise λ_2 (parmi les ouverts convexes d'aire donnée). Dans un article de 1973, Troesch [14] fit quelques expérimentations numériques qui l'ont conduit à conjecturer que l'ouvert optimal devait être *un stade* : enveloppe convexe de deux boules identiques tangentes. C'était assez moral, dans la mesure où le stade est effectivement le convexe le plus proche de la réunion de deux boules qui est le minimum absolu. Dans cette Note, nous montrons qu'il est impossible que le stade soit l'ouvert optimal, car il ne satisfait pas les conditions d'optimalité sur les deux demi-cercles. Notre technique permet également de répondre à une question qu'avait posée Giuseppe Buttazzo : quand on minimise $\lambda_1(\Omega)$ parmi les ouverts Ω d'aire fixée c contenus dans une boîte D et que D n'est pas assez grand pour contenir la boule d'aire c, les parties libres de l'ouvert optimal (i.e. celles qui ne sont pas sur le bord de D) sont-elles des morceaux de sphère ? Nous montrons là encore qu'il ne peut s'agir d'arcs de cercle. Cet argument se généralise aisément à d'autres problèmes de minimisation de valeurs propres ou à d'autres problèmes surdéterminés sur des ouverts dont le bord contiendrait des morceaux de sphère.

Si le stade n'est pas l'ouvert qui minimise λ_2, celui-ci (dont nous montrons l'existence au paragraphe 3) doit néanmoins y ressembler beaucoup puisque nous prouvons qu'il possède en son bord exactement deux segments et que ceux-ci sont parallèles. L'étape suivante, qui nous résiste pour l'instant, consiste certainement à montrer que l'ouvert optimal possède deux axes de symétrie perpendiculaires. Des essais numériques (qui seront présentés dans [10]) confirment d'ailleurs que l'ouvert optimal est très proche du stade.

Pour d'autres problèmes liés à la minimisation des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet, nous renvoyons à Bucur–Henrot [2] où nous prouvons l'existence d'un (quasi) ouvert qui minimise λ_3, Buttazzo–Dal Maso [3] où est prouvée l'existence d'un (quasi) ouvert optimal pour toutes les valeurs propres, mais sous une hypothèse de confinement : les ensembles sont astreints à rester dans une boîte fixe D. Voir enfin Henrot–Pierre [7] pour un panorama de problèmes ouverts sur cette question.

Nous donnerons ci-dessous, par manque de place, seulement le schéma des démonstrations renvoyant à Henrot–Oudet [6] pour les détails.

2. Le stade ne minimise pas λ_2

Dans cette section, nous prouvons le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Le stade, enveloppe convexe de deux disques identiques tangents, ne réalise pas le minimum de λ_2 parmi les ouverts convexes d'aire fixée du plan.*

Nous allons évidemment prouver ce résultat en montrant que le stade ne satisfait pas l'une des conditions nécessaires d'optimalité. Établissons tout d'abord celles-ci. Notons Ω^* l'ouvert qui minimise λ_2 (l'existence de Ω^* sera prouvée au théorème 3.1) parmi les ouverts convexes d'aire fixée du plan. Nous supposerons que la valeur propre $\lambda_2(\Omega^*)$ est simple (ce qui est vrai pour le stade). Notons que si $\lambda_2(\Omega^*)$ n'était pas simple, cela contredirait la conjecture selon laquelle le minimum de λ_3 est atteint pour la boule B, *cf.* [2] ou [15]. En effet, on aurait dans ce cas

$$\lambda_2(\Omega^*) = \lambda_3(\Omega^*) < \lambda_2(B) = \lambda_3(B).$$

Nous noterons u la fonction propre associée, normalisée par

$$\int_{\Omega^*} u^2(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Nous supposerons également que Ω^* est assez régulier (par exemple, de classe $\mathrm{C}^{1,1}$) pour justifier les calculs de dérivation par rapport au domaine. Notons que le stade est lui-même $\mathrm{C}^{1,1}$.

PROPOSITION 2.2. – *Sous les hypothèses ci-dessus pour l'ouvert optimal Ω^*, on a* :

(i) *la dérivée normale est constante $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha\right)$ sur les parties strictement convexes du bord de Ω^** ;

(ii) *soit $[A,B]$ un segment inclus dans le bord de Ω^*, notons $t \in [a,b]$ l'abscisse sur ce segment et $\psi(t) = |\nabla u(t)|^2 - \alpha^2$. Alors $\psi = w''$ où w est une fonction positive admettant a et b comme racines triples.*

Schéma de la démonstration. – Remarquons tout d'abord qu'on peut se débarrasser simplement de la contrainte de volume. En effet, grâce à l'homogénéité des valeurs propres en dimension deux (sous l'effet d'une homothétie de rapport k les valeurs propres sont divisées par k^2 tandis que l'aire est multipliée par k^2), il est équivalent de rechercher le minimum du produit de la valeur propre par l'aire : $\lambda_2(\Omega)|\Omega|$. Sous l'effet d'une déformation du domaine par un champ de vecteurs V défini sur $\mathbb{R}^2$, la dérivée (par rapport au domaine) de $\lambda_2(\Omega)|\Omega|$ est donnée par (*cf.* Simon [12] ou Sokolowski–Zolésio [13]) :

$$\mathrm{d}\big[\lambda_2(\Omega)|\Omega|\big](\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} \left(\lambda_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 |\Omega|\right) V \cdot n \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

(dans (1), n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega^*$). La difficulté est ici de n'autoriser que des déformations du bord qui préservent la convexité. Si le champ V est à support sur une partie strictement convexe du bord, alors pour τ assez petit $(\mathrm{Id} + \tau V)(\Omega)$ sera encore convexe. La première partie de la proposition 2.2 résulte alors du fait qu'on peut prendre V quelconque dans (1). On a alors $\alpha^2 = \lambda_2/|\Omega^*|$.

Sur un segment inclus dans le bord, c'est un peu plus compliqué. Les déformations permises sont en fait celles telles que $V \cdot n$ est une fonction concave sur le segment entier. On obtient alors la condition en exprimant le fait que $\int_a^b \psi(t)v(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$, pour toute fonction concave v et en intégrant deux fois par parties.

Démonstration du théorème 2.1. – Supposons que le stade Ω soit le minimum. Il vérifie alors la condition d'optimalité (i) de la proposition 2.2. Plaçons l'origine au centre de l'un des cercles $\mathcal{C}$ et introduisons, comme dans Aviles [1], la fonction $w(x,y) = x\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial x}$. Un calcul direct montre que w vérifie :

(i) $-\Delta w = \lambda_2 w$ dans Ω ;
(ii) $w = 0$ sur le demi-cercle, partie de $\mathcal{C}$ situé sur le bord (car c'est une ligne de niveau de u) ;
(iii) $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sur ce même demi-cercle (car $\frac{\partial u}{\partial n}$ y est constant d'après l'hypothèse).

D'après le théorème d'unicité de Holmgren, on en déduirait que w est nul dans un voisinage du demi-cercle, donc partout par analyticité de u. Or ceci impliquerait que u est radiale, au moins à l'intérieur d'un disque (car w n'est autre que la dérivée par rapport à l'angle θ sur chaque cercle centré à l'origine). Ce qui est impossible puisqu'alors u devrait s'annuler à l'intérieur de Ω en dehors de sa ligne nodale (sur l'autre moitié de $\mathcal{C}$).

3. Existence et caractérisation du minimum

Dans cette section, nous donnons les grandes lignes de la preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Il existe un ouvert convexe Ω^* qui minimise λ_2 parmi les ouverts convexes d'aire donnée. De plus, si on le suppose assez régulier* (*de classe* $\mathrm{C}^{1,1}$) *et que l'on suppose $\lambda_2(\Omega^*)$ simple, alors Ω^* possède en son bord deux segments et deux seulement et ceux-ci sont parallèles.*

Schéma de la démonstration

Existence. – C'est fait par exemple dans Cox–Ross [4]. On peut aussi utiliser, plus simplement, des arguments classiques de γ-convergence pour une suite minimisante.

Au moins un segment. – S'il n'y avait pas de segment sur le bord, celui-ci serait strictement convexe et la relation $\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha$ devrait être vraie sur tout le bord. Ceci impliquerait $\alpha = 0$ (prendre un point où la ligne nodale de u touche le bord) ce qui est impossible par le même principe d'unicité de Holmgren.

Au moins deux segments. – S'il n'y avait qu'un segment, la ligne nodale de u viendrait se refermer sur ce segment (à cause du raisonnement précédent). On montre alors, en adaptant l'argument de Melas [9], que c'est impossible.

Au plus deux segments. – Supposons qu'il y ait un troisième segment sur le bord qui ne rencontre pas la ligne nodale de u (celle-ci rencontre le bord en deux points seulement, *cf.* Melas [9]). On met ce segment dans la direction de $\mathrm{O}x$ et on introduit la fonction $v_t = tu + \frac{\partial u}{\partial x}$. On montre alors, en exploitant la condition d'optimalité (ii) de la proposition 2.2, que pour t petit v_t doit avoir (au moins) trois lignes nodales démarrant sur le segment. En faisant croître t, on arrive à un instant critique où deux telles lignes nodales démarrent au même point ce qui fournirait un zéro double pour $\frac{\partial v_t}{\partial y}$ et qui conduit à une contradiction quand on regarde le développement en série de v_t au voisinage de ce point. On montre en effet que v_t devrait avoir toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre 2 et donc être identiquement nulle dans un voisinage du point.

Les deux segments sont parallèles. – Supposons qu'ils ne le soient pas. L'un des segments $\mathcal{S}$ est pris horizontal et Ω^* est situé au-dessus de ce segment. On introduit de nouveau $v_t = tu + \frac{\partial u}{\partial x}$. Cette fois l'une des lignes nodales de v_t part du point N, point le plus haut du bord de Ω^* et se termine sur le segment $\mathcal{S}$. Quand t croît, cette ligne nodale se rapproche de la ligne nodale de u qui joint deux points A et B situés l'un sur le segment $\mathcal{S}$ l'autre sur le segment non horizontal. En particulier, jouant sur la proximité de la ligne nodale de v_t avec le point B, on peut montrer que $\nabla v_t(B) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Mais comme

$$\nabla v_t(B) = t\nabla u(B) + \nabla \frac{\partial u}{\partial x}(B) = \nabla \frac{\partial u}{\partial x}(B),$$

on en déduit que toutes les dérivées secondes de u doivent être nulles au point B. Là encore un simple développement en série de u au voisinage de B fournit la contradiction recherchée.

Références bibliographiques

[1] Aviles P., Symmetry theorems related to Pompeiu's problem, Amer. J. Math. 108 (1986) 1023–1036.
[2] Bucur D., Henrot A., Minimization of the third eigenvalue of the Dirichlet Laplacian, Proc. Roy. Soc. London 456 (2000) 985–996.
[3] Buttazzo G., Dal Maso G., An existence result for a class of shape optimization problems, Arch. Rational Mech. Anal. 122 (1993) 183–195.
[4] Cox S., Ross M., Extremal eigenvalue problems for starlike planar domains, J. Differ. Eq. 120 (1995) 174–197.
[5] Faber G., Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. (1923) 169–172.
[6] Henrot A., Oudet E., Minimization of the second Dirichlet eigenvalue amongst convex domains (à paraître).
[7] Henrot A., Pierre M., Optimisation de forme (livre à paraître).
[8] Krahn E., Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann. 94 (1924) 97–100.
[9] Melas A., On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$, J. Differ. Geom. 35 (1992) 255–263.
[10] Oudet E., Some numerical results about minimization problems involving eigenvalues (à paraître).
[11] Polya G., On the characteristic frequencies of a symmetric membrane, Math. Z. 63 (1955) 331–337.
[12] Simon J., Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, Numer. Funct. Anal. Optim. 2 (1980) 649–687.
[13] Sokolowski J., Zolésio J.-P., Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[14] Troesch B.A., Elliptical membranes with smallest second eigenvalue, Math. of Comput. 27–124 (1973) 767–772.
[15] Wolf S.A., Keller J.B., Range of the first two eigenvalues of the Laplacian, Proc. Roy. Soc. London A 447 (1994) 397–412.