

# Quelques résultats en optimisation de forme et stabilisation

Edouard Oudet

7 octobre 2002



*Si vous pensez avoir trouvé la solution  
eh bien,  
une bonne nuit de sommeil,  
et il n'y paraîtra plus.*

B. Fontaine



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Chapitre 2: étude de la seconde valeur propre du laplacien . . . . .	5
1.2	Chapitre 3 et 4: étude numérique des valeurs propres du laplacien-Dirichlet	6
1.2.1	Le problème de Troesch . . . . .	6
1.2.2	Étude des autres valeurs propres . . . . .	6
1.2.3	Résultats . . . . .	7
1.3	Chapitre 5: un problème de transport optimal . . . . .	7
1.4	Chapitre 6 et 7: analyse non harmonique . . . . .	8
1.4.1	Un résultat sur les zéros des fonctions de Bessel . . . . .	8
1.4.2	Stabilisation arbitrairement rapide . . . . .	9
	<b>Optimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Minimisation de la seconde valeur propre du laplacien-Dirichlet</b>	<b>13</b>
2.1	Bref historique . . . . .	13
2.2	Notations et prérequis . . . . .	14
2.3	Résultats antérieurs . . . . .	15
2.3.1	Le théorème de Faber et Krahn par la symétrisation de Schwarz . .	16
2.3.2	Le théorème de Polya et Szegö . . . . .	16
2.4	Problème d'existence sous contrainte de connexité . . . . .	22
2.5	Existence d'un ouvert optimal en dimension quelconque . . . . .	22
2.6	Un premier résultat de régularité . . . . .	24
2.7	Simplicité de la seconde valeur propre . . . . .	27
2.7.1	Simplicité de la seconde valeur propre du stade . . . . .	27
2.7.2	Simplicité de la valeur propre d'un ouvert optimal . . . . .	29
2.8	Conditions d'optimalité du premier ordre . . . . .	31
2.8.1	Sur les parties strictement convexes . . . . .	32
2.8.2	Sur les parties plates . . . . .	35
2.9	Étude des parties plates . . . . .	37
2.9.1	L'ouvert optimal possède au moins une partie plate . . . . .	37

2.9.2	Un résultat concernant la ligne nodale de la seconde fonction propre	38
2.9.3	Les parties plates sont exactement au nombre de 2	44
2.9.4	Les deux segments sont parallèles	46
2.10	Le stade ne minimise pas $\lambda_2$ sous contrainte de convexité et de volume	47
2.10.1	Le stade n'est pas optimal	48
2.10.2	Autres conséquences	49
2.11	L'ouvert optimal n'est pas lisse	50
<b>3</b>	<b>Optimisation par algorithmes génétiques</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction	53
3.2	Le théorème des schémas	55
3.3	Minimisation d'une fonction de $\mathbb{R}^N$	57
3.3.1	Codage et opérateurs	57
3.3.2	Application à un problème d'irrigation optimale	58
3.4	Minimisation d'une fonction de formes	65
3.4.1	Optimisation par tableaux de bits	65
3.4.2	Utilisation des cellules de Voronoi	66
3.4.3	Minimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet	69
<b>4</b>	<b>Minimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet par une méthode mixte relaxation/lignes de niveaux</b>	<b>73</b>
4.1	L'optimisation frontière, dérivation par rapport au domaine	74
4.1.1	Présentation générale	74
4.1.2	Application au problème du Stade	77
4.2	La méthode de relaxation	79
4.2.1	Introduction	79
4.2.2	Relaxation pour les problèmes de valeurs propres	79
4.2.3	Approximation numérique	81
4.3	La méthode des lignes de niveaux appliquée au problème relaxé	82
4.3.1	Introduction	82
4.3.2	Calcul de la dérivée	84
4.3.3	Calcul numérique d'une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi	85
4.3.4	Prise en compte des valeurs propres multiples	88
4.3.5	Traitement de la contrainte de volume	89
4.3.6	Résultats	90
	<b>Un problème d'irrigation optimale</b>	<b>95</b>
<b>5</b>	<b>Transportation Problems with Free Dirichlet Regions<sup>1</sup></b>	<b>97</b>
5.1	Introduction	97

---

1. This chapter is a joint work with G. Buttazzo and E. Stepanov

---

5.2	Existence of optimal sets . . . . .	100
5.3	Qualitative properties of optimal sets . . . . .	101
5.3.1	Problem in a unit disk of $\mathbf{R}^2$ . . . . .	102
5.3.2	Singular points . . . . .	105
5.3.3	Absence of loops . . . . .	107
5.3.4	The optimal set and the boundary . . . . .	110
5.3.5	Asymptotic estimates . . . . .	113
<b>Résultats d'analyse non harmonique</b>		<b>117</b>
<b>6</b>	<b>Observabilité d'un secteur angulaire sous condition de type Neumann</b>	<b>119</b>
6.1	Introduction . . . . .	119
6.2	Le théorème de Ingham et une méthode de A. Haraux . . . . .	119
6.3	Étude des fonctions propres d'un secteur angulaire . . . . .	124
6.4	Une méthode de stabilisation rapide . . . . .	127
6.5	Résultat d'observabilité pour l'équation des ondes . . . . .	130
6.6	Stabilisation d'un secteur angulaire . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Monotonie des zéros des dérivées des fonctions de Bessel</b>	<b>137</b>
7.1	Rappels et notations . . . . .	137
7.2	Etude de la suite des zéros des dérivées de fonction de Bessel . . . . .	138
7.2.1	Le théorème de monotonie de Komornik . . . . .	138
7.2.2	Généralisation à des dérivées d'ordre supérieur . . . . .	139
7.3	Monotonie uniforme . . . . .	142
<b>A</b>	<b>Démonstration du théorème de Faber et Krahm</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>The segment is not optimal</b>	<b>149</b>
<b>C</b>	<b>More numerical results</b>	<b>155</b>





# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse porte sur des aspects théoriques et numériques de l'optimisation de forme ainsi que sur la stabilisation rapide de l'équation des ondes.

### 1.1 Chapitre 2 : étude de la seconde valeur propre du laplacien

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Désignons par  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \dots$  les valeurs propres du laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet.

Au début du siècle Faber [30] et Krahn [55] démontrèrent que la boule minimise la première valeur propre du laplacien-Dirichlet sous contrainte de volume. La même question fut résolue pour  $\lambda_2$ , toujours par Krahn, dans [56] : l'unique ouvert qui minimise  $\lambda_2$  sous contrainte de volume est la réunion de deux boules disjointes identiques.

En 1973, Troesch après quelques expériences numériques est amené à conjecturer que le stade, l'enveloppe convexe de deux disques tangents de mêmes rayons, minimise  $\lambda_2$  sous contrainte de convexité et de volume.

C'est sur cette question que porte la première partie de mon travail de thèse :

#### Résultats obtenus

Dans les propositions qui suivent,  $\Omega^*$  désigne un ouvert qui minimise la seconde valeur propre du laplacien Dirichlet parmi les ouverts convexes de volume donné.

#### Régularité de $\Omega^*$

**Proposition 1**  *$\Omega^*$  est (au moins) de régularité  $C^1$ .*

**Proposition 2**  *$\Omega^*$  ne peut être de régularité  $C^{2,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ .*

Dans les énoncés suivant nous supposerons  $\Omega^*$  de classe  $C^{1,1}$ .

### Simplicité de $\lambda_2$

D'après le théorème de Krein Rutman,  $\lambda_1(\Omega) \neq \lambda_2(\Omega)$  pour tout ouvert connexe. Pour un ouvert optimal nous avons :

**Proposition 3**  $\lambda_2(\Omega^*) \neq \lambda_3(\Omega^*)$ .

L'importance de ce résultat apparaît dans l'obtention des conditions d'optimalité du premier ordre. Grâce à celles-ci, il a été possible de décrire la géométrie de  $\Omega^*$  :

### Étude du bord de $\Omega^*$

**Proposition 4**  $\partial\Omega^*$  contient exactement deux segments parallèles d'intérieur non vide.

Après l'étude du bord de  $\Omega^*$ , il pourrait apparaître fort probable que le stade minimise  $\lambda_2$ . Nous ne sommes parvenus que tardivement à la conclusion qu'il n'en était rien :

### Réponse à la conjecture de Troesch

**Proposition 5** Le stade ne minimise pas  $\lambda_2$  parmi les ouverts convexes de volume donné.

La démonstration de cette proposition répond à une autre question posée par G. Buttazzo : si l'on cherche à minimiser  $\lambda_1$  parmi les ouverts de volume donné contenus dans une boîte (assez fine pour que la boule ne soit pas un ouvert admissible), les parties libres d'un ouvert optimal sont-elles des arcs de cercle ? Là encore, la réponse est non.

Cette première partie de mon travail m'a amené très naturellement à chercher à décrire numériquement  $\Omega^*$ . C'est l'objet des deux chapitres suivants :

## 1.2 Chapitre 3 et 4 : étude numérique des valeurs propres du laplacien-Dirichlet

### 1.2.1 Le problème de Troesch

La description numérique de  $\Omega^*$  a été obtenue en discrétisant  $\partial\Omega^*$  et en lui appliquant un algorithme de gradient. La contrainte de convexité a été, quant à elle, prise en compte par une méthode classique de pénalisation. Ceci nous a permis d'établir que, bien que distinct du stade,  $\Omega^*$  en est numériquement très proche.

### 1.2.2 Étude des autres valeurs propres

Comme nous l'avons mentionné, de nombreux travaux ont porté sur la minimisation des valeurs propres par rapport au domaine sous seule contrainte de volume. Rappelons que pour  $n \geq 3$ , le problème d'identifier un quasi-ouvert du plan qui minimise  $\lambda_n$  est encore non résolu. Il est donc marquant que très peu d'études numériques portent sur les

valeurs propres d'indice supérieur à trois (bien que très souvent l'étude de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  puisse être utilisée comme cas test). Ceci peut s'expliquer par plusieurs difficultés:

- la nécessité d'envisager un algorithme qui ne prescrive pas la topologie de l'ouvert optimal,
- un grand nombre de minima locaux apparaissent pour  $\lambda_n$  et  $n \geq 3$ ,
- la non différentiabilité des valeurs propres multiples.

Pour contourner ces difficultés, j'ai adapté à ce problème deux méthodes introduites récemment en optimisation de forme: les méthodes d'homogénéisation et de lignes de niveaux. Les étapes de cette méthode d'optimisation se déroulent comme suit :

1. L'utilisation d'un algorithme génétique non structuré introduit dans [75] par M. Schoenauer. Bien que coûteux numériquement, ce pré-traitement a, entre autres avantages, ceux d'autoriser toutes les classes topologiques (y compris l'absence de simple connexité) et d'être facilement parallélisable.
2. Puis, nous appliquons au candidat trouvé à l'étape 1. une méthode de type Level Set introduite par J. Sethian. Ma contribution à cette approche réside dans l'utilisation d'une densité dégénérée.
3. Enfin, une méthode classique d'optimisation frontière est utilisée afin d'obtenir des majorations satisfaisantes de  $\lambda_n(\Omega^*)$ .

Soulignons que cette démarche est susceptible d'être appliquée à d'autres problèmes de valeurs propres.

### 1.2.3 Résultats

Nous obtenons principalement deux résultats :

- Une description numérique des ouverts optimaux pour  $\lambda_n$ ,  $1 \leq n \leq 10$ ,
- $\lambda_5$  n'est pas minimisé par une boule ou une réunion de boules.

## 1.3 Chapitre 5 : un problème de transport optimal

Les problèmes de transport optimal connaissent un grand développement ces dernières années notamment en raison de leurs liens avec de nombreux domaines des mathématiques (optimisation de forme, mécanique des fluides, théorie géométrique de la mesure, etc...).

Lors d'un séjour de trois mois à Pise, en collaboration avec G. Buttazzo et E. Stepanov, je me suis intéressé au problème suivant :

$$\min \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}_{\Omega}(x, \Sigma) dx : \Sigma \subset \bar{\Omega} \text{ fermé, connexe, } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \right\}$$

où  $\mathcal{H}^1$  est la mesure de Hausdorff de dimension un et  $\Omega$  un ouvert borné du plan.

## Résultats numériques

Nous avons pu établir un certain nombre de propriétés qualitatives d'un ensemble optimal  $\Sigma^*$  pour lesquelles nous renvoyons à [17]. Je tiens à souligner la complémentarité dans ce travail de l'approche numérique et des avancées théoriques. Là encore, c'est un algorithme de type génétique qui m'a permis d'étudier ce problème d'optimisation.

L'originalité de ce travail numérique réside dans la manière de représenter l'ensemble  $\Sigma$ . Si l'on décide de coder cet ensemble par un nombre fini de points, il reste à choisir une manière de paramétrer les connexions entre ces points. Bien qu'élémentaire, cette méthode a donné des résultats satisfaisants. Elle pourra, je l'espère, s'appliquer à d'autres problèmes (propagation de fissures, optimal cutting, etc...).

## 1.4 Chapitre 6 et 7 : analyse non harmonique

Dans l'étude de la contrôlabilité exacte, l'analyse non harmonique des équations à temps réversible (typiquement l'équation des ondes), a apporté ces dernières années des résultats plus fins (seulement pour certains ouverts) que la méthode classique des multiplicateurs. Pour ce faire il est nécessaire d'avoir des informations précises sur les valeurs propres de l'ouvert considéré. C'est dans cet esprit que j'ai obtenu le résultat suivant :

### 1.4.1 Un résultat sur les zéros des fonctions de Bessel

Nous étudions ici la suite des zéros des fonctions de Bessel ainsi que celle de leurs dérivées. Nous rappelons que pour tout paramètre réel  $\nu$ , la fonction de Bessel  $J_{\nu}(x)$  possède un ensemble dénombrable de zéros simples  $(j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence

$$(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers  $\pi$ . Dans [69] Porter prouve le résultat de monotonie suivant :

**Théorème 1** *Soit  $J_{\nu}$  une fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  et  $(j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de ses zéros. On est dans l'un des cas suivants :*

- (a)  $|\nu| > 1/2$ , alors la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- (b)  $|\nu| < 1/2$ , la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

(c)  $|\nu| = 1/2$ , la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

La question étudiée dans ce paragraphe est la suivante : peut-on obtenir des résultats de monotonie analogues pour les dérivées des fonctions de Bessel ? Introduisons pour cela une notion de monotonie partielle :

**Définition 1** Nous dirons d'une suite qu'elle est essentiellement monotone si elle est monotone à partir d'un certain rang.

Dans [51], V.Komornik prouve un résultat de monotonie partielle pour des combinaisons du type  $u = kJ_\nu + lxJ'_\nu$  où  $(k, l)$  est un couple de réels fixé différent du couple nul. Cette étude a pour corollaire la proposition suivante :

**Proposition 6** Soit  $\nu \in \mathbb{R}$  et  $(j'_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des zéros de  $J'_\nu$ . La suite  $(j'_{\nu n} - j'_{\nu n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante.

Qu'en est-il pour les dérivées d'ordre supérieur ? On pose

$$u_{\alpha, \nu, l}(x) = \frac{d^l}{dx^l} (x^\alpha J_\nu(x)),$$

où  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$  et  $l \in \mathbb{N}$ . J'ai pu établir le

**Théorème 2** Pour tout  $\alpha < 0$  et  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $|\nu| > 1/2$ , la fonction  $u_{\alpha, \nu, l}$  possède une suite dénombrable de zéros  $(j^l_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence  $(j^l_{\nu n} - j^l_{\nu n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante.

### 1.4.2 Stabilisation arbitrairement rapide

Nous considérons dans ce paragraphe un secteur angulaire  $\Omega$  de rayon  $R$  et d'angle  $\alpha$  soit

$$\Omega = \{(R \cos(\theta), R \sin(\theta)) \text{ avec } 0 < \theta < \alpha\},$$

et  $u$  solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 \text{ et } u'(0) = u_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Désignons par  $\Gamma$  la partie circulaire de la frontière de  $\Omega$ . J'ai pu établir le résultat de contrôlabilité suivant

**Proposition 7** Soit  $I$  un intervalle et pour tout  $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  posons

$$\|(u_0, u_1)\|_I := \int_I \int_\Gamma |u|^2 d\Gamma dt$$

où  $u$  est la solution de (6.23). Si  $I$  est de longueur strictement supérieure à  $2R$ , la fonction  $\|\cdot\|_I$  définit une norme sur l'espace des conditions initiales  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Ces normes sont de plus équivalentes pour tout intervalle de longueur strictement supérieure à  $2R$ .

Ce résultat permet grâce à la méthode de stabilisation rapide de Komornik de diminuer l'énergie de la solution, à l'aide d'un contrôle frontière, de manière arbitrairement rapide.

## Première partie

# Optimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet





## Chapitre 2

# Minimisation de la seconde valeur propre du laplacien-Dirichlet

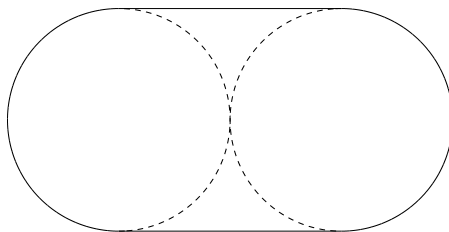
### 2.1 Bref historique

L'étude des valeurs propres du laplacien, et en particulier les inégalités isopérimétriques où elles interviennent, constitue un enjeu important, aussi bien dans le domaine des équations aux dérivées partielles qu'en géométrie différentielle. Le premier résultat obtenu fut la démonstration au début du siècle de la conjecture de Rayleigh par Faber [30] et Krahn [55]. Ils démontrèrent que la boule minimise la première valeur propre du laplacien-Dirichlet sous contrainte de volume. Le domaine qui minimise la seconde valeur propre  $\lambda_2$  est la réunion de deux boules identiques. Ce résultat est souvent attribué à P. Szegő, comme le remarque G. Pólya dans [68], mais il semblerait qu'il apparaisse déjà dans l'un des articles de E. Krahn (voir [56] où cette remarque passe relativement inaperçue). Plus récemment, Buttazzo et Dal Maso ont démontré dans [16] l'existence d'une forme optimale dans la classe des quasi-ouverts inclus dans une boîte fixée pour chacune des valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet, sous contrainte de volume.

En 1973, Troesch propose dans [81] quelques valeurs numériques des fréquences fondamentales de différents types de membranes planes. Suite à ces résultats, il constate deux *évidences numériques* :

- l'ouvert convexe qui minimise la seconde valeur propre de l'opérateur de Dirichlet sous contrainte de volume possède des parties plates,
- le stade (voir figure 2.1), c'est à dire l'enveloppe convexe de deux disques tangents de même rayon, semble très proche de l'ouvert optimal.

En 1993, Cox et Ross prouvent de manière élémentaire dans [21] l'existence d'une forme optimale sous contrainte de volume et de convexité pour la seconde valeur propre de l'opérateur de Dirichlet (ils considèrent aussi le cas, plus complexe, des ouverts étoilés).

FIG. 2.1: *Un stade*

De plus, leur méthode permet d'évaluer l'écart qui sépare les valeurs propres de deux ouverts distincts en terme de leur distance géométrique (i.e. leur distance de Hausdorff).

C'est à la conjecture de Troesch qu'est consacrée la première partie de ce travail :

$$\textit{Le stade minimise-t-il } \lambda_2 \textit{ parmi les ouverts convexes d'aire fixée ?} \quad (2.1)$$

## 2.2 Notations et prérequis

Pour les notions que nous rappelons ci-dessous, la littérature existante est abondante. Nous renvoyons par exemple à [20] ou [24]. Désignons par  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Dans le cas de condition au bord de Dirichlet, l'espace de travail est classiquement l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  qui est défini comme l'adhérence de l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$  pour la norme  $\|u\|_{H^1} := (\int_\Omega u(x)^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx)^{1/2}$ . Le laplacien sur  $\Omega$  avec condition au bord de Dirichlet étant un opérateur auto-adjoint d'inverse compact, il existe une suite de valeurs propres positives et tendant vers  $+\infty$  et une suite de fonctions propres associées que nous noterons respectivement  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \dots$  et  $u_1, u_2, u_3, \dots$ . On a donc

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k(\Omega) u_k & \text{dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

On décidera systématiquement de normaliser les fonctions propres par la condition

$$\int_\Omega u_k(x)^2 dx = 1. \quad (2.3)$$

Les fonctions propres forment une base Hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ . Par hypo-analyticité du laplacien, elles sont analytiques dans  $\Omega$ . Il résulte du principe du maximum et du théorème de Krein-Rutman que la première fonction propre  $u_1$  est positive dans  $\Omega$  (strictement positive si  $\Omega$  est connexe). En particulier, comme  $u_2$  est orthogonale à  $u_1$  pour le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ ,  $u_2$  doit nécessairement changer de signe. Les deux ensembles  $\{x \in \Omega, u_2(x) > 0\}$  et  $\{x \in \Omega, u_2(x) < 0\}$  s'appellent *les ensembles nodaux* de  $u_2$  et l'ensemble

$\{x \in \Omega, u_2(x) = 0\}$  est la *ligne nodale* de  $u_2$ . Nous utiliserons de plus la caractérisation variationnelle suivante de la première valeur propre :

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} v(x)^2 dx}. \quad (2.4)$$

L'infimum ci-dessus est atteint pour  $v = u_1$ , la première fonction propre du laplacien-Dirichlet. Plus généralement, il existe la caractérisation suivante :

**Proposition 8 (*Principe du min-max ou principe de Poincaré*)** *La suite de valeurs propres  $(\lambda_k(\Omega))_{k \in \mathbb{N}}$  de l'opérateur de Laplace-Dirichlet vérifie :*

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \lambda_k(\Omega) = \min_{v \in V_{k-1}(\Omega)^\perp} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx},$$

où  $V_{k-1}(\Omega)^\perp$  est l'orthogonal dans  $H_0^1(\Omega)$  de l'espace vectoriel engendré par les  $k-1$  premières fonctions propres. On a aussi la caractérisation intrinsèque suivante :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{W_k(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)} \max_{w \in W_k(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |w(x)|^2 dx},$$

où  $W_k(\Omega)$  parcourt les sous-espaces vectoriels de  $H_0^1(\Omega)$  de dimension  $k$ . Le minimum étant réalisé par le sous espace engendré par les  $k$  premières fonctions propres.

**Démonstration** On pourra consulter [72].□

Cette relation a pour corollaire la propriété de monotonie fondamentale suivante que nous utiliserons à plusieurs reprises :

**Corollaire 1** *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^N$  tels que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Soient  $(\lambda_k(\Omega_i))_{k \in \mathbb{N}}$   $i = 1, 2$  les deux suites de valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Dirichlet associées à ces deux ouverts. On a :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k(\Omega_2) \leq \lambda_k(\Omega_1).$$

**Démonstration** Cela est dû au fait que  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$  (cette inclusion a bien un sens car les éléments de  $H_0^1(\Omega_1)$  peuvent être prolongés par 0 en dehors de  $\Omega_1$  et définissent ainsi des fonctions de  $H_0^1(\Omega_2)$ ).□

## 2.3 Résultats antérieurs

Nous rappelons dans cette partie les idées des étapes que nous avons citées précédemment. Cela pour permettre au lecteur d'avoir une vue globale des différents moyens qui ont été mis en oeuvre jusqu'à présent pour étudier qualitativement les problèmes de minimisation de valeurs propres.

### 2.3.1 Le théorème de Faber et Krahn par la symétrisation de Schwarz

Un outil essentiel dans l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles est le procédé de symétrisation. On trouvera dans [47] un grand nombre de types de symétrisations et leurs influences sur certains espaces fonctionnels. Nous nous contenterons dans l'annexe A de présenter la symétrisation due à Schwarz qui conduit à une preuve rapide du théorème de Faber et Krahn.

### 2.3.2 Le théorème de Polya et Szegő

Dans l'étude de la seconde valeur propre, on est amené à considérer les ensembles nodaux associés à une fonction propre :

**Définition 2** Soit  $u$  une fonction continue définie sur l'ouvert  $\Omega$ . On appelle ensemble nodal de  $u$ , une composante connexe de  $\Omega \setminus \{x \in \Omega, u(x) = 0\}$ .

**Remarque 3** – Si  $u \in C^\infty(\Omega)$  est une fonction propre du laplacien-Dirichlet, et  $u$  est bien définie en tous points de  $\Omega$  (parler de valeurs ponctuelles a bien un sens),

– par définition, un ensemble nodal de  $u$  est un ouvert .

Nous utiliserons souvent la propriété suivante :

**Proposition 9** Soit  $u$  une fonction propre de Dirichlet associée à  $\Omega$  et soit  $\omega$  un ensemble nodal de  $u$  alors  $u \in H_0^1(\omega)$ .

**Démonstration** On utilise la caractérisation capacitaire des éléments de  $H_0^1$  :

$$(u \in H_0^1(\Omega)) \Leftrightarrow (u \in H^1(\Omega) \text{ et } u \text{ est nul quasi-partout sur } \Omega^c),$$

où quasi partout signifie à (au plus) un ensemble de capacité nulle près et où l'on confond  $u$  et un représentant quasi-continu de  $u$  (nous renvoyons le lecteur pour ces différentes notions à [41]).

Revenons à la proposition ; si on restreint  $u$  à un de ses ensembles nodaux, la frontière de cet ensemble est formée de deux parties : l'une est incluse dans  $\partial\Omega$  sur laquelle  $u$  est nul quasi-partout et une deuxième située dans  $\Omega$  qui est un ensemble où  $u$  est nulle. Sur la réunion de ces deux ensembles,  $u$  est bien nulle quasi partout.  $\square$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant dû à Courant et Hilbert :

**Théorème 4 (Courant-Hilbert)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et  $u_k$  la  $k$ -ième fonction propre de l'opérateur de Laplace-Dirichlet. Le nombre d'ensembles nodaux de  $u_k$  est inférieur ou égal à  $k$ .

**Démonstration** La preuve que nous présentons provient de [20] page 451.

Soit  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$  la suite des fonctions propres associées à  $\Omega$ . Supposons par l'absurde que la  $k$ -ième fonction propre  $u_k$  associée à  $\lambda_k$  possède plus de  $k$  ensembles nodaux  $\omega_1, \dots, \omega_{k+1}, \dots$ . Soient  $v_1, v_2, \dots, v_k$  les restrictions normalisées de  $u_k$  aux sous-ensembles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  prolongées par 0. D'après la proposition 9,  $v_l \in H_0^1(\omega_l)$  pour  $l = 1, \dots, k$ , ces fonctions étant linéairement indépendantes, il est possible d'en trouver une combinaison linéaire  $\varphi = \sum_{l=1}^k a_l \cdot v_l$  non nulle telle que :

- $\int_{\Omega} \varphi \cdot w_l = 0$  pour  $l = 1, \dots, k-1$  où  $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$  désignent les  $k-1$  premières fonctions propres de  $\cup_{l=1}^k \omega_l$  (la matrice  $(\int v_i w_j)$  où  $1 \leq j \leq k-1$  et  $1 \leq i \leq k$  a un noyau non trivial).
- $\sum_{l=1}^k a_l^2 = 1$ . La fonction  $\varphi$  est normalisée.

Par l'orthogonalité des fonctions  $v_l$ , il est clair en intégrant par parties que l'on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 dx = \lambda_k.$$

La  $k$ -ième valeur propre de l'ouvert  $\cup_{l=1}^k \omega_l$  est donc plus petite que  $\lambda_k$  d'après la proposition 8. Or, d'après la monotonie des valeurs propres rappelée dans le corollaire 1, la  $k$ -ième valeur propre de  $\cup_{l=1}^k \omega_l$  est plus grande que  $\lambda_k$ . Il y a donc égalité. Cette propriété est vraie pour tout ouvert contenant  $\cup_{l=1}^k \omega_l$  et contenu dans  $\Omega$ , toujours par monotonie.

On peut ainsi construire une suite strictement croissante d'ouverts contenant  $\cup_{l=1}^k \omega_l$  et contenus dans  $\Omega$ , chacun de  $k$ -ième valeur propre  $\lambda_k$ . Soient  $u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^m, \dots$  la suite des  $k$ -ièmes fonctions propres associées à ces ouverts. D'après le principe du maximum ces fonctions sont linéairement indépendantes. Quitte à appliquer un procédé d'orthogonalisation classique, on peut de plus supposer cette famille orthogonale. On peut alors trouver une combinaison linéaire  $\Phi = \sum_{l=1}^m b_l \cdot u_k^l$  non nulle telle que :

- $\int_{\Omega} \Phi \cdot u_l = 0$  pour  $l = 1, \dots, m-1$ . La fonction  $\Phi$  est orthogonale aux  $m-1$  premières fonctions propres de  $\Omega$ .
- $\sum_{l=1}^m b_l^2 = 1$ .

Toujours d'après la proposition 8, on a :

$$\lambda_k = \int_{\Omega} |\nabla \Phi(x)|^2 dx \geq \lambda_m \text{ cela pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Or il est bien connu que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m = +\infty$  (on pourra se reporter à [46] page 229 pour avoir des estimations plus précises sur le taux de croissance) : c'est la contradiction cherchée.  $\square$

**Remarque 5** *Le raisonnement de la seconde partie de la preuve démontre la monotonie stricte des valeurs propres de Dirichlet, c'est à dire :*

$$(\Omega_1 \subset \Omega_2 \text{ et } \Omega_2 \neq \Omega_1) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k(\Omega_2) < \lambda_k(\Omega_1).$$

*La notation  $\Omega_2 \neq \Omega_1$  signifie  $\Omega_2 \setminus \Omega_1$  contient au moins une boule ouverte de rayon aussi petit que l'on veut. Pour des résultats plus fins à ce sujet, on pourra se reporter à [14]. Ce résultat peut aussi s'obtenir plus facilement dans le cas régulier en utilisant la dérivation par rapport au domaine (voir le paragraphe 2.8).*

**Théorème 6 (Krahn et Szegő)** *Le minimum de  $\lambda_2(\Omega)$  parmi les ouverts de  $\mathbb{R}^N$  de volume donné est atteint par la réunion de deux boules disjointes de même volume :*

$$\min_{|\Omega|=l} \lambda_2(\Omega) = \lambda_2(B_1 \cup B_2) \text{ où } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont deux boules telles que } |B_1| = |B_2| = l/2.$$

**Démonstration** Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque de volume  $l$  et  $u$  la seconde fonction propre associée à  $\Omega$ . D'après le théorème 4, la fonction  $u$  possède au plus 2 ensembles nodaux. La première fonction propre étant de signe constant, par orthogonalité,  $u$  possède au moins deux ensembles nodaux. Ils sont donc au nombre de deux. Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ces deux ensembles nodaux. La fonction  $u$  étant de signe constant sur chaque ensemble nodal, on a les égalités suivantes :

$$\lambda_2(\Omega) = \lambda_1(\omega_1) = \lambda_1(\omega_2).$$

De plus, d'après l'inégalité de Faber-Krahn (théorème 48), on sait que

$$\lambda_1(\omega_1) \geq \lambda_1(B_1) \text{ et } \lambda_1(\omega_2) \geq \lambda_1(B_2),$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont des boules (que l'on peut supposer disjointes vu l'invariance par translation des problèmes de valeurs propres) de volume respectif  $|\omega_1|$  et  $|\omega_2|$ . On a donc :

$$\lambda_2(\Omega) \geq \max(\lambda_1(B_1), \lambda_1(B_2)).$$

Cette minoration étant optimale lorsque  $B_1$  et  $B_2$  ont même volume : les valeurs propres de la réunion de deux boules sont en effet obtenues par la réunion des valeurs propres de chacune d'entre elles séparément (celles-ci étant données par les carrés des zéros de certaines fonctions de Bessel, voir par exemple [20]). La réunion de deux boules disjointes minimise bien la seconde valeur propre parmi les ouverts de volume donné.  $\square$

### Les théorèmes d'existence de Cox et Ross

Nous reproduisons ici la démonstration de l'existence d'une forme optimale proposée par Cox et Ross dans [21]. On considère dans cette section des ouverts bornés convexes  $\Omega$  du plan contenant l'origine. On décrira  $\Omega$  de la façon suivante :

$$\Omega = \{r \exp(i\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < f(\theta)\}$$

où  $f$  est une fonction continue (un ouvert convexe borné ayant la propriété du  $\varepsilon$ -cône, son bord est localement lipschitzien) vérifiant  $f(0) = f(2\pi)$ .

Notant  $A$  l'aire de  $\Omega$  et  $L$  son périmètre, on a les égalités suivantes :

- $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2 d\theta$
- $L = T(G)$  où  $T$  est la variation totale de  $G$  qui est par définition la paramétrisation du bord :  $(f(\theta) \cos(\theta), f(\theta) \sin(\theta))$ .

On utilisera dans la suite la caractérisation suivante de la convexité :

**Lemme 1** *Un ouvert étoilé de fonction radiale  $f$  est convexe si et seulement si*

$$f(\theta) \geq (f(\theta+a)f(\theta-b)\sin(a+b))/(f(\theta+a)\sin(a) + f(\theta-b)\sin(b)) \quad (2.5)$$

pour tous  $a, b > 0, a+b < \pi$ .

**Démonstration** On se fixe un repère d'origine 0 et de premier axe, la demi-droite  $[0, f(\theta) \exp(i\theta))$ . En faisant passer le dénominateur (positif!) de (2.5) à gauche, les quantités qui interviennent dans l'inégalité à démontrer s'interprètent comme les coordonnées dans ce repère des points d'affixes

$$f(\theta) \exp(i\theta), f(\theta+a) \exp(i(\theta+a)), \text{ et } f(\theta-b) \exp(i(\theta-b)).$$

L'inégalité peut alors se traduire géométriquement par la comparaison d'aires de rectangles (voir figure 2.2), elle même équivalente à la relation de convexité.  $\square$

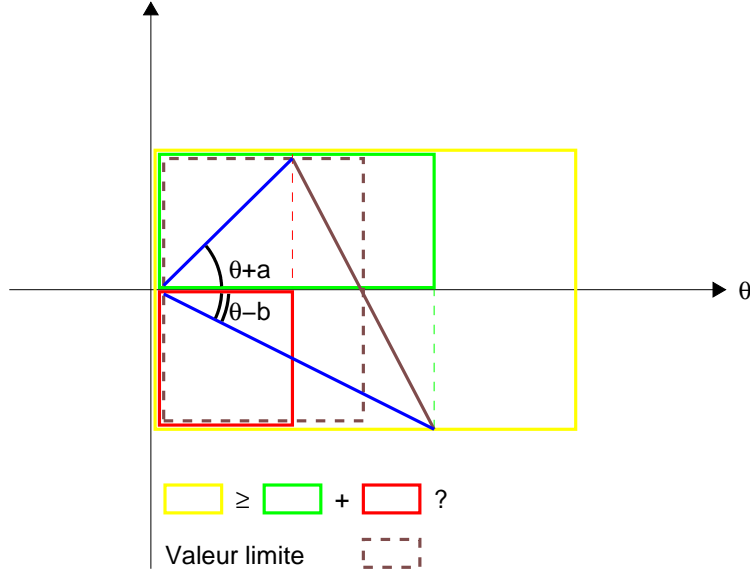
On s'intéresse à l'ensemble des ouverts convexes qui vérifient les contraintes géométriques suivantes :

$$|\Omega| = A, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \leq L, \quad (2.7)$$

où  $|\cdot|$  représente la mesure de Lebesgue et  $\mathcal{H}^1$  la mesure de Hausdorff linéaire. Pour prouver l'existence d'un extremum, on adopte le processus suivant classique en optimisation :

1. On s'assure de la compacité de l'ensemble des variables pour une topologie bien choisie.
2. On vérifie la continuité de la fonctionnelle par rapport à la topologie considérée.
3. On vérifie que le point extrémal appartient bien à l'ensemble de définition de la fonctionnelle.

FIG. 2.2: *Interprétation géométrique de l'inégalité de convexité*

Appliquons à présent cette méthode au problème qui nous intéresse :

**1. et 3. Compacité :** L'inégalité de Bonnesen (voir [65]) assure que tout ouvert convexe vérifiant (2.6) et (2.7) contient un disque noté  $D_{A/L}$  de rayon  $A/L$ . On a en effet :

$$\pi\rho(\Omega) + |\Omega|/\rho(\Omega) \leq \mathcal{H}^1(\partial\Omega),$$

où  $\rho(\Omega)$  est le rayon du plus grand disque que contient  $\Omega$ . Cela va nous permettre d'établir la compacité séquentielle d'une suite extrême.

Un convexe étant étoilé par rapport à chacun de ses points, il est étoilé par rapport à chacun des points du disque  $D_{A/L}$ . Les points de  $\Omega$  vérifient alors une condition de double cône. En se plaçant en un point où  $f$  est dérivable (ce qui est possible pour presque tout  $\theta$  car  $f$  est localement lipschitzienne donc dérivable presque partout), on peut borner la variation  $\|f'\|$  par  $(L^2/A - 1)^{1/2}$  (la quantité sous la racine étant positive d'après l'inégalité isopérimétrique). Par continuité du taux de variation, on peut borner uniformément la pente de  $f$

$$\|f'\|_{\infty} \leq (L^2/A - 1)^{1/2}.$$

Grâce au théorème d'Ascoli, on a alors une précompacité séquentielle pour toute suite de fonctions radiales vérifiant (2.5), (2.6) et (2.7). En appliquant ce résultat à une suite minimisante, par compacité dans  $(C^0([0, 2\pi]), \|\cdot\|_{\infty})$ , il existe une fonction vérifiant (2.5), (2.6) et (2.7) limite uniforme de cette suite.



**2. Continuité du spectre :** Le lemme suivant utilise essentiellement la monotonie des valeurs propres de Dirichlet.

**Lemme 2** *On considère deux ouverts étoilés  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de fonctions radiales  $f_1$  et  $f_2$  vérifiant  $f_1, f_2 \geq \rho$ . L'inégalité  $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \rho$  entraîne :*

$$|\lambda_k(f_1) - \lambda_k(f_2)| \leq (3/\rho)\lambda_k(D_\rho)\|f_1 - f_2\|_\infty.$$

**Démonstration** On utilise la caractérisation du min-max de la proposition 8. On note  $d = \|f_1 - f_2\|_\infty$ . On a

$$(1 + d/\rho)f_1 \geq (f_2 - d) + d = f_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_k(f_1) &\leq \lambda_k(f_2/(1 + d/\rho)) = (1 + d/\rho)^2 \lambda_k(f_2) \\ &\leq (1 + 3d/\rho) \lambda_k(f_2) \\ &\leq \lambda_k(f_2) + (3/\rho)\lambda_k(D_\rho)d. \end{aligned}$$

La première inégalité est une conséquence de la monotonie des valeurs propres et de la relation  $\lambda_k(t\Omega) = \frac{\lambda_k(\Omega)}{t^2}$  (cf. 8). L'inégalité suivante est quant à elle déduite de  $d \leq \rho$ . Vu les rôles symétriques joués par les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , l'inégalité du lemme est vérifiée.  $\square$

**Théorème 7** *Le problème d'optimisation de forme lié à la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre du laplacien sous les conditions (2.5), (2.6) et (2.7) admet une solution. De plus, si l'on se donne un réel  $a_0$  et que l'on note  $\sigma(f)$  le spectre du laplacien-Dirichlet de l'ouvert convexe associé à  $f$ , la fonction  $f \mapsto \text{dist}(a_0, \sigma(f))$  atteint sa borne inférieure sous les contraintes (2.5), (2.6) et (2.7).*

**Démonstration** La première partie du théorème est une conséquence immédiate de l'étude ci-dessus. Tous les ouverts étant dans une boîte fixe, il existe  $K$  tel que  $a_0 < \lambda_K(f)$  pour tout  $f$  vérifiant (2.5), (2.6) et (2.7). On s'est donc ramené à l'étude de la continuité de la fonction

$$f \mapsto \min_{1 \leq k \leq K} |\lambda_k(f) - a_0|.$$

Le minimum d'un nombre fini de fonctions continues étant une fonction continue, on prouve le résultat.  $\square$

**Théorème 8** *Le problème d'optimisation de forme lié à la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre du laplacien sous les seules conditions (2.5) et (2.6) admet une solution.*

**Démonstration** La valeur propre  $\lambda_k(\Omega)$  étant minorée par 0, il existe une suite minimisante de domaine  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers un ouvert convexe  $\Omega^*$ . Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^1(\partial\Omega_n) = +\infty$ , on a d'après l'inégalité géométrique  $6|\Omega^*| \geq \mathcal{H}^1(\partial\Omega^*)W(\Omega^*)$  (voir [76] p139-173),

$\lim_{n \rightarrow +\infty} W(\Omega_n) = 0$  où  $W(\Omega^*)$  représente la distance minimale entre deux lignes parallèles qui délimitent  $\Omega^*$ .

Pour  $n$  assez grand,  $\Omega_n$  est alors contenu dans un rectangle aussi fin que l'on veut dont la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre devient aussi grande que l'on veut (la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre du rectangle  $[0, \varepsilon] \times [0, a/\varepsilon]$  valant  $\pi^2(\frac{k^2 \varepsilon^2}{a^2} + \frac{1}{\varepsilon^2})$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit), ce qui constitue une contradiction pour une suite minimisante. La suite  $(\mathcal{H}^1(\Omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bornée et l'on peut appliquer le même raisonnement que précédemment.  $\square$

## 2.4 Problème d'existence sous contrainte de connexité

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous souhaitons étudier la minimisation de  $\lambda_2$  sous contrainte de volume et de convexité. Une question naturelle serait d'étudier ce problème sous la contrainte moins forte de connexité. Nous montrons ici que ce problème est mal posé, plus précisément :

**Proposition 10** *Soit  $c > 0$ . On a l'égalité suivante*

$$\min \{ \lambda_2(\Omega), \ |\Omega| = c \} = \inf \{ \lambda_2(\Omega), \ \Omega \text{ connexe}, |\Omega| = c \}.$$

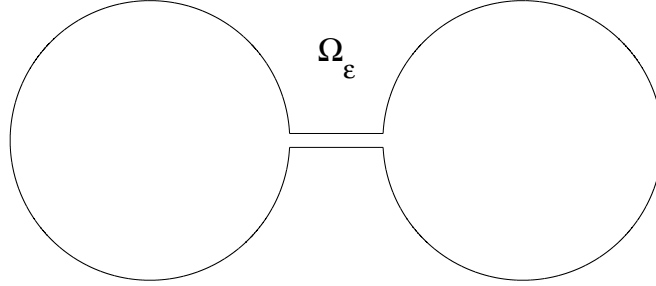
**Démonstration** Considérons une suite d'ouverts  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont les éléments sont deux boules de volume  $c/2 - 1/2n$  reliées par un tube de volume  $1/n$  (voir figure 2.3). Il est clair que cette suite converge au sens de Hausdorff complémentaire vers  $\Omega^*$ , la réunion de deux boules disjointes de volume  $c$ . Le nombre de composantes connexes de  $\Omega_n^c$  étant égal à 1 pour tout  $n$ , le théorème de Sverak (spécifique à la dimension 2, pour plus de détails voir [41]) entraîne que  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega^*$ . D'après la continuité des valeurs propres du laplacien-Dirichlet pour la  $\gamma$ -convergence,  $\lambda_2(\Omega_n) \rightarrow \lambda_2(\Omega^*)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui démontre la proposition.  $\square$

## 2.5 Existence d'un ouvert optimal en dimension quelconque

Nous proposons à présent une généralisation à la dimension  $N$  du théorème 8, utilisant les techniques classiques de l'optimisation de forme. À la différence du lemme 2, nous ne sommes pas en mesure d'estimer l'écart entre deux valeurs propres en fonction de leur éloignement géométrique. Plus précisément, nous allons démontrer le

**Théorème 9** *Soient  $l$  une constante strictement positive et  $k$  un entier naturel non nul. Il existe  $\Omega^*$  tel que*

$$\lambda_k(\Omega^*) = \inf \{ \lambda_k(\Omega), \ \Omega \subset \mathbb{R}^N, \ \Omega \text{ convexe et } |\Omega| = l \}.$$

FIG. 2.3: *Exemple de suite minimisante*

**Démonstration** Soit  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante pour ce problème d'optimisation.

• Montrons dans un premier temps que la suite des diamètres des  $\Omega_n$  est bornée. Supposons par l'absurde qu'il existe une sous-suite d'ouverts dont les diamètres tendent vers l'infini. Par la convexité des éléments de la suite  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la contrainte de volume, il existe une suite de parallélépipèdes rectangles  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \Omega_n \subset P_n$ ,
- Les  $P_n$  sont de plus en plus plats (i.e. au moins une de leur dimension tend vers 0).

Or pour de tels parallélépipèdes la suite  $(\lambda_1(P_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est connue et tend vers  $+\infty$ . D'après le principe de monotonie du corollaire 1, la suite  $(\lambda_1(\Omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend aussi vers l'infini, ce qui constitue une contradiction.

• Les diamètres étant bornés, nous pouvons supposer (quitte à translater les éléments de  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) que toute cette suite est contenue dans un ouvert borné. D'après les propriétés classiques de la distance de Hausdorff (voir [41]), il existe un ouvert convexe  $\Omega^*$  tel que

- $\Omega_n$  converge pour la distance de Hausdorff vers  $\Omega^*$ ,
- $|\Omega_n| \rightarrow |\Omega^*|$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ;  $\Omega^*$  est donc un ouvert admissible.

Par un argument de stabilité, ces deux derniers résultats entraînent alors que  $\Omega_n$   $\gamma$ -converge vers  $\Omega^*$ . Or cette dernière convergence implique  $\lambda_k(\Omega_n) \rightarrow \lambda_k(\Omega^*)$  quand  $n$  tend vers l'infini (pour plus de détails, on pourra consulter [41]). L'ouvert  $\Omega^*$  minimise donc bien  $\lambda_k$  parmi les ouverts convexes de volume  $l$ .  $\square$

## 2.6 Un premier résultat de régularité

Nous revenons à présent à l'étude du problème (2.1). Dans toute la suite de ce chapitre,  $\Omega^*$  désignera un ouvert qui minimise  $\lambda_2$  sous contraintes de volume et de convexité. Nous commençons par démontrer le résultat de régularité à priori suivant:

**Proposition 11**  $\Omega^*$  est au moins de régularité  $C^1$ .

**Démonstration** Nous supposons par l'absurde que le bord de  $\Omega^*$  possède un coin en un point  $x_0$  du bord. Considérons un repère d'origine  $x_0$ . Nous allons montrer que l'ouvert convexe obtenu en coupant un bout du coin en  $x_0$  diminue asymptotiquement le produit  $\lambda_2(\Omega) |\Omega|$ , ce qui contredira l'optimalité de  $\Omega^*$ .

Soit  $\pi > \alpha > 0$ , l'ouverture du coin en  $x_0$  (formé par les tangentes à droite et à gauche en  $x_0$ ). On désignera par  $\eta$  le vecteur normal rentrant en le point  $x_0$  (i.e. un vecteur directeur normalisé de la bissectrice de l'angle  $\alpha$ ). Nous utiliserons les notations suivantes (voir figure 2.4) :

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \{x \in \Omega^*, \varepsilon < x \cdot \eta \leq 2\varepsilon\}, \\ C_\varepsilon &= \{x \in \Omega^*, x \cdot \eta \leq \varepsilon\}, \\ \Omega_\varepsilon &= \Omega^* \setminus C_\varepsilon. \end{aligned}$$

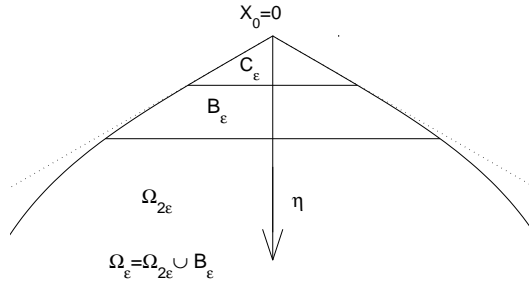


FIG. 2.4:

Nous allons utiliser la caractérisation variationnelle 8 des valeurs propres pour estimer  $\lambda_2(\Omega_\varepsilon)$ . Nous considérons pour cela  $u_1$  et  $u_2$  les deux premières fonctions propres normalisées de  $\Omega^*$ . Il est classique (utiliser les fonctions propres d'un secteur angulaire comme fonctions barrières) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \Omega^*} |\nabla u_i(x)| = 0 \text{ pour } i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Soit  $\beta > 0$  un petit paramètre que nous fixerons à posteriori, d'après l'inégalité (2.8), pour  $\varepsilon$  suffisamment petit on a

$$|u_i(x)| \leq \beta |x|, \text{ pour tout } x \in C_{2\varepsilon} \text{ et } i = 1, 2.$$

On a alors l'estimation

$$\int_{C_{2\varepsilon}} |u_i(x)|^2 dx \leq \beta^2 \int_{C_{2\varepsilon}} |x|^2 dx \leq 4\alpha\beta^2\varepsilon^4 / \cos^4(\alpha/2). \quad (2.9)$$

On introduit à présent une fonction de troncature de classe  $C^1$ ,  $\chi_\varepsilon$  qui vérifie

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon(x) = 1 \text{ si } x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0 \leq \chi_\varepsilon(x) \leq 1 \text{ si } x \in B_\varepsilon, \\ \chi_\varepsilon(x) = 0 \text{ si } x \in C_\varepsilon \text{ et} \\ |\nabla \chi_\varepsilon(x)| \leq C/\varepsilon^2 \end{cases}$$

pour une certaine constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon > 0$ . On définit de plus

$$u_\varepsilon^1 = \chi_\varepsilon u_1 \text{ et } u_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon u_2.$$

Ces deux fonctions étant quasi partout nulles à l'extérieur de  $\Omega_\varepsilon$ , elles sont des éléments de  $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ . Étant linéairement indépendantes, l'espace vectoriel  $V$  qu'elles engendrent est de dimension 2. D'après la proposition 8 de l'annexe A, on a

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon) \leq \max_{v \in V} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |v(x)|^2 dx} = \max_{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2} \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(a_1 u_\varepsilon^1 + a_2 u_\varepsilon^2)(x)|^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} |(a_1 u_\varepsilon^1 + a_2 u_\varepsilon^2)(x)|^2 dx}.$$

Mais pour  $i = 1, 2$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^i(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega_{2\varepsilon}} |u_i(x)|^2 dx = 1 - \int_{C_{2\varepsilon}} |u_i(x)|^2 dx \geq 1 - 4\alpha\beta^2\varepsilon^4 / \cos^4(\alpha/2) \quad (2.10)$$

d'après (2.9). De la même manière en utilisant l'orthogonalité de  $u_1$  et  $u_2$  dans  $L^2(\Omega^*)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^1(x) u_\varepsilon^2(x) dx &= \int_{\Omega_{2\varepsilon}} u_1(x) u_2(x) dx + \int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2(x) u_1(x) u_2(x) dx \\ &= - \int_{C_{2\varepsilon}} u_1(x) u_2(x) dx + \int_{B_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2(x) u_1(x) u_2(x) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^1(x) u_\varepsilon^2(x) dx \right| \leq 2 \int_{C_{2\varepsilon}} |u_1(x) u_2(x)| dx \leq 8\alpha\beta^2\varepsilon^4 / \cos^4(\alpha/2). \quad (2.11)$$

Il nous reste à estimer les normes  $L^2$  des gradients

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^i(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega^*} |\nabla u_i(x)|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} |\nabla \chi_\varepsilon(x)|^2 u_i^2(x) dx$$

ce qui entraîne

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^i(x)|^2 dx \leq \lambda_i(\Omega^*) + 4C\alpha\beta^2\varepsilon^2 / \cos^4(\alpha/2) =: \lambda_i + C_1\beta^2\varepsilon^2, \quad (2.12)$$

toujours d'après (2.9). De façon analogue d'après  $|\nabla u_i(x)| \leq \beta$  sur  $B_\varepsilon$  et  $|B_\varepsilon| \leq 3\varepsilon^2 \tan(\alpha/2)$ , on a

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^1(x) \nabla u_\varepsilon^2(x) dx \right| \leq \int_{B_\varepsilon} |\nabla u_1(x) \nabla u_2(x)| dx + \int_{B_\varepsilon} |\nabla \chi_\varepsilon(x)|^2 |u_1(x) u_2(x)| dx \quad (2.13)$$

d'où

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon^1(x) \nabla u_\varepsilon^2(x) dx \right| \leq \beta^2 \varepsilon^2 (3 \tan(\alpha/2) + 4C\alpha / \cos^4(\alpha/2)) =: C_2 \beta^2 \varepsilon^2.$$

En rassemblant les inégalités (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), on en déduit

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon) \leq \max_{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2} \frac{\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \beta^2 \varepsilon^2 (C_1(a_1^2 + a_2^2) + 2C_2 |a_1 a_2|)}{a_1^2 + a_2^2 - \frac{4\alpha \beta^2 \varepsilon^4}{\cos^4(\alpha/2)} (a_1^2 + a_2^2 + 4 |a_1 a_2|)}.$$

Cela entraîne (divisant numérateur et dénominateur par  $a_1^2 + a_2^2$  et utilisant  $2 |a_1 a_2| \leq (a_1^2 + a_2^2)$ )

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon) \leq \frac{\lambda_2(\Omega^*) + \beta^2 \varepsilon^2 (C_1 + C_2)}{1 - \frac{12\alpha \beta^2 \varepsilon^4}{\cos^4(\alpha/2)}}.$$

D'autre part on a

$$|\Omega_\varepsilon| = |\Omega^*| - |C_{2\varepsilon}| = |\Omega^*| - 4\varepsilon^2 \tan(\alpha/2) + o(\varepsilon^2)$$

d'où

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon) |\Omega_\varepsilon| \leq \lambda_2(\Omega^*) |\Omega^*| + \varepsilon^2 (\beta^2 (C_1 + C_2) |\Omega^*| - 4\lambda_2(\Omega^*) \tan(\alpha/2)) + o(\varepsilon^2).$$

Cette dernière quantité étant asymptotiquement strictement plus petite que  $\lambda_2(\Omega^*) |\Omega^*|$  pour tous  $\beta$  tel que

$$\beta^2 < \frac{4\lambda_2(\Omega^*) \tan(\alpha/2)}{(C_1 + C_2) |\Omega^*|}.$$

Ce qui fournit la contradiction cherchée.  $\square$

**Remarque 10** Cette même démonstration reste valable dans un cadre plus général dont notamment la minimisation d'autres valeurs propres sous contrainte de convexité. On pourra trouver une généralisation de ce résultat dans [13]. Citons de plus les travaux de L. Caffarelli et P.L Lions ainsi que ceux de G. Ciarlet T. Lachand-Robert qui ont obtenu pour d'autres problèmes de minimisation avec contrainte de convexité des résultats de régularité plus forts (du type  $C^{1,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ ).

## 2.7 Simplicité de la seconde valeur propre

La question de la simplicité est un problème important dans l'étude qui nous intéresse. En effet, pour pouvoir dériver par rapport au domaine et obtenir ainsi des conditions d'optimalité du premier ordre, comme nous le verrons plus loin, il est nécessaire de s'assurer au préalable de la simplicité de la valeur propre considérée. Nous présentons ici deux points de vue. Le premier paragraphe établit par un procédé direct la simplicité de la seconde valeur propre du stade. Pour ce faire nous exploitons les propriétés de symétries du stade. N'étant pas en mesure de prouver à priori de telles propriétés de symétries, nous démontrons, dans le paragraphe suivant, la simplicité de la valeur propre d'un ouvert convexe optimal pour la minimisation d'une valeur propre sous contrainte de convexité.

### 2.7.1 Simplicité de la seconde valeur propre du stade

Nous présentons dans cette partie un moyen pour prouver la simplicité de la seconde valeur propre du stade (figure 2.1). Cette méthode peut être adaptée aux cas d'autres ouverts plans ayant comme le stade deux axes de symétrie. Nous utiliserons la proposition suivante due à Cheng-Shou Lin (voir [59]) :

**Proposition 12** *Soit  $\Omega$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$ . La multiplicité de la seconde valeur propre du laplacien-Dirichlet associé à cet ouvert est au plus deux.*

Pour démontrer la simplicité de la valeur propre d'un ouvert du plan, nous partons du constat que chaque ensemble nodal a pour première valeur propre la seconde valeur propre de cet ouvert. On compare alors à l'aide du principe de monotonie, les différentes valeurs que peuvent prendre les valeurs propres de ces sous-ensembles nodaux. Nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 3** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe du plan ayant au moins deux axes de symétrie. On peut construire une base de l'espace propre associé à la seconde valeur propre du laplacien-Dirichlet dont les éléments ont leur ligne nodale située sur l'un des axes de symétrie.*

**Démonstration** D'après la proposition précédente, la seconde valeur propre du laplacien possède au plus deux fonctions propres. Supposons la seconde valeur propre du laplacien simple. Nous notons  $u_2$ , la seconde fonction propre de cet ouvert. On se fixe un repère dont les axes sont les droites de symétrie. On définit

$$v(x, y) = u_2(x, -y).$$

On vérifie immédiatement que  $v$  est aussi une fonction propre pour  $\lambda_2$ . Par simplicité de la valeur propre, elle est proportionnelle à  $u_2$ . On a donc  $u_2(x, y) = \pm u_2(x, -y)$ . Par le même procédé, on prouve que  $u_2(x, y) = \pm u_2(-x, y)$ . On a donc les équivalences suivantes :

$$u_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow u_2(-x, y) = 0 \Leftrightarrow u_2(x, -y) = 0.$$

La ligne nodale de  $u_2$  est donc symétrique, elle aussi, par rapport à chacun des axes. D'après le théorème de Melas et Alessandrini ([61] et [3]), celle-ci ne peut être située que le long d'un des axes.

Supposons à présent la seconde valeur propre du laplacien double : soient  $u_2^1$  et  $u_2^2$  deux fonctions propres associées à  $\lambda_2$ , normalisées et orthogonales. On pose :

$$\bar{u}_2^1 = \frac{1}{2} (u_2^1(x, y) + u_2^1(-x, y)).$$

Si cette fonction n'est pas identiquement nulle, on construit ainsi une fonction propre symétrique par rapport à l'axe  $(0y)$ . En appliquant le même procédé à la fonction  $\bar{u}_2^1$ , on construit une nouvelle fonction propre nécessairement antisymétrique par rapport à  $(0x)$  (une seconde fonction propre ne pouvant pas être symétrique par rapport à chacun des axes d'après le théorème 4). Dans ce cas la ligne nodale de  $\bar{u}_2^1$  est portée par  $(0x)$ .

Si l'on a  $u_2^1(x, y) + u_2^1(-x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\bar{u}_2^1$  est anti-symétrique par rapport à l'axe  $(0y)$  et la ligne nodale de  $\bar{u}_2^1$  est portée par  $(0y)$ . En renouvelant le procédé, on construit une nouvelle fonction propre nécessairement symétrique par rapport à  $(0x)$ . Nous avons ainsi pu construire une fonction propre toujours notée  $\bar{u}_2^1$ , ayant un axe de symétrie et un autre d'antisymétrie.

Supposons que l'axe de symétrie de  $\bar{u}_2^1$  soit  $(0y)$ . Soit  $v$  une autre fonction propre non colinéaire à  $\bar{u}_2^1$ . On peut écrire

$$v(x, y) = \frac{v(x, y) + v(-x, y)}{2} + \frac{v(x, y) - v(-x, y)}{2},$$

somme d'une fonction symétrique par rapport à  $(0x)$  et d'une fonction antisymétrique par rapport à  $(0x)$ . Si  $v$  est antisymétrique par rapport à  $(0x)$ , alors  $v$  est colinéaire à  $\bar{u}_2^1$  (car ces fonctions ont alors les mêmes ensembles nodaux et sont chacune première fonction propre de ces ensembles nodaux), ce qui est contraire à notre hypothèse. La partie symétrique de  $v$  est donc non nulle. Notons la  $v_{sym}$ . Comme pour  $u_2^1$ , on considère :

$$\bar{v}_{sym} = \frac{1}{2} (v_{sym}(x, -y) + v_{sym}(x, y)),$$

qui prouve que  $v_{sym}$  est nécessairement une fonction antisymétrique par rapport à  $(0y)$  et c'est également une fonction propre. On a donc construit deux fonctions propres ayant chacune leur ligne nodale située sur un des axes de symétrie. Ces deux fonctions propres n'étant pas proportionnelles, le lemme est prouvé.  $\square$

**Proposition 13** *La seconde valeur propre du laplacien-Dirichlet associée au stade  $S$  est simple.*

**Démonstration** Soit  $S$  un stade défini comme l'enveloppe convexe de deux boules unités tangentes. Supposons la seconde valeur propre du laplacien associée au stade double. D'après le lemme 3, il existe des fonctions propres ayant pour domaines nodaux les sections



du stade délimitées par ses deux axes de symétrie. Soit  $N_1$  (respectivement  $N_2$ ) une des parties délimitée par l'axe de symétrie vertical du stade (respectivement une des parties délimitée par l'axe de symétrie horizontal). On doit avoir nécessairement :

$$\lambda_2(S) = \lambda_1(N_1) = \lambda_1(N_2).$$

Or la partie  $N_2$  est contenue dans un rectangle de longueur 4 et de largeur 1 alors que  $N_1$  contient un rectangle de longueur  $1 + \sqrt{2}/2$  et de largeur  $\sqrt{2}$ . On peut alors utiliser la monotonie des valeurs propres vis à vis de l'inclusion (cf. corollaire 1) et le fait que les valeurs propres du laplacien-Dirichlet d'un rectangle de dimensions  $a \times b$  sont du type  $\lambda = \pi^2 (n^2/a^2 + m^2/b^2)$  où  $m$  et  $n$  décrivent  $\mathbb{N}^*$  (cf. [20] page 301) pour obtenir :

$$\pi^2 (1/4^2 + 1) < \lambda_1(N_2) = \lambda_1(N_1) < \pi^2 \left( 1 / \left( 1 + \sqrt{2}/2 \right)^2 + 1/2 \right).$$

D'où la contradiction.  $\square$

### 2.7.2 Simplicité de la valeur propre d'un ouvert optimal

Le lemme suivant nous permettra de conclure quant à la simplicité de la valeur propre d'un ouvert convexe qui minimise  $\lambda_2$ .

**Lemme 4** *Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^{1,1}$  possédant une valeur propre de multiplicité  $m > 1$ ;*

$$\lambda_{k+1}(\Omega) = \lambda_{k+2}(\Omega) = \dots = \lambda_{k+m}(\Omega).$$

*Alors, il existe un champ de vecteurs  $V \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , qui préserve le volume et la convexité tel qu'en posant*

$$\Omega_t = (Id + tV)(\Omega),$$

*on ait pour  $t$  assez petit*

$$\lambda_{k+1}(\Omega_t) < \lambda_{k+1}(\Omega) = \lambda_{k+m}(\Omega) < \lambda_{k+m}(\Omega_t).$$

**Remarque 11** – *L'hypothèse de convexité qui apparaît dans ce lemme n'est en fait pas nécessaire. Le résultat reste exact sans cette contrainte.*

- *Ce lemme a pour conséquence immédiate le résultat suivant: Si  $\Omega^*$  minimise  $\lambda_k$  sous contrainte de volume (avec ou sans contrainte de convexité) et si  $\lambda_k(\Omega^*)$  est une valeur propre multiple, alors nécessairement on a*

$$\lambda_{k-1}(\Omega^*) = \lambda_k(\Omega^*). \quad (2.14)$$

*Nous retrouverons ce type de phénomène lors de l'étude numérique des problèmes de valeurs propres: Réciproquement, nous verrons que tous les ouverts optimaux, identifiés numériquement, vérifient la relation (2.14).*

D'après la simplicité de  $\lambda_1(\Omega^*)$  (résultat conséquence du théorème de Krein Rutman voir [24]), l'identité (2.14) ne peut être vérifiée pour  $k = 2$ ; on a donc le corollaire suivant:

**Corollaire 2** *Soit  $\Omega^*$  un domaine convexe qui minimise  $\lambda_2$  parmi les ouverts convexes de volume donné. Si  $\Omega^*$  est de classe  $C^{1,1}$ , alors  $\lambda_2(\Omega^*)$  est simple.*

**Démonstration** du lemme : nous utiliserons les résultats classiques de la dérivation par rapport au domaine que nous rappelons dans le paragraphe 2.8. Néanmoins, comme nous l'avons déjà mentionné, si une valeur propre est multiple, elle n'est pas Fréchet différentiable par rapport à des variations de domaine. En revanche elle admet des dérivées dans la direction de tout champ de vecteur : plus précisément, le quotient

$$\frac{\lambda_{k+p}(\Omega_t) - \lambda_{k+p}(\Omega)}{t} \text{ pour } p = 1, \dots, m$$

admet une limite lorsque  $t$  tend vers 0. De plus (voir [39] ou [73]) l'ensemble de ces limites constitue l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M}$  de dimension  $m \times m$  définie par

$$\mathcal{M} = \left( - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial u_j}{\partial n} V.n d\sigma \right)_{k+1 \leq i, j \leq k+m} \quad (2.15)$$

où  $\frac{\partial u_i}{\partial n}$  représente la dérivée normale de la  $i$ ème fonction propre normalisée.

Introduisons deux points  $A$  et  $B$  du bord situés sur des parties strictement convexes du bord ( $\Omega$  étant de classe  $C^{1,1}$ , de telles parties existent). Considérons un champ de déformation  $V$  tel que  $V.n \equiv 1$  dans un petit voisinage de  $A$  de taille  $\varepsilon$  et  $V.n \equiv -1$  dans un voisinage de  $B$  de même mesure. Il est en outre possible de choisir un tel champ  $V$  de telle sorte que la variation de volume soit nulle. D'après le lemme 5 ci-après, notre champ  $V$  est une perturbation admissible i.e. maintient  $\Omega_t$  dans la classe des convexes de volume donné pour  $t$  assez petit. D'après le résultat de différentiation que nous avons rappelé, nous aurons démontré le lemme si nous pouvons choisir deux points  $A$  et  $B$  tels que la matrice  $\mathcal{M}$  ait deux valeurs propres de signes opposés. D'après la continuité des racines d'un polynôme par rapport à la variation de ses coefficients, il est clair que le signe des valeurs propres de  $\mathcal{M}$  est donné par le signe des valeurs propres de

$$\mathcal{M}_{A,B} = \left( - \frac{\partial u_i}{\partial n}(A) \frac{\partial u_j}{\partial n}(A) + \frac{\partial u_i}{\partial n}(B) \frac{\partial u_j}{\partial n}(B) \right)_{k+1 \leq i, j \leq k+m}.$$

Soit  $\Phi_A$  (respectivement  $\Phi_B$ ) le vecteur de composantes  $\frac{\partial u_i}{\partial n}(A)$  (respectivement  $\frac{\partial u_i}{\partial n}(B)$ ) pour  $i = k+1, \dots, k+m$ . On a alors par un calcul direct

$$X^t \mathcal{M}_{A,B} X = (X \cdot \Phi_B)^2 - (X \cdot \Phi_A)^2.$$

La signature de la forme quadratique associée à  $\mathcal{M}$  est donc  $(1, 1)$  si l'on est en mesure de montrer l'indépendance linéaire du couple  $(\Phi_A, \Phi_B)$ . Supposons ces deux vecteurs

linéairement dépendants pour tous couples  $(A, B)$ . Le déterminant  $2 \times 2$  formé par les deux premières coordonnées des vecteurs  $\Phi_A$  et  $\Phi_B$  est alors nul indépendamment du couple  $(A, B)$ . Il existe donc  $c > 0$  tel que

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial n} = c \frac{\partial u_{k+2}}{\partial n}$$

sur une partie strictement convexe  $\gamma \subset \partial\Omega$ . La fonction  $w := u_{k+1} - cu_{k+2}$  vérifie alors

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda_{k+1} w \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \gamma, \\ \partial w / \partial n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \gamma. \end{cases}$$

D'après le théorème d'unicité d'Hölmgren,  $w$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $\gamma$  (donc aussi dans  $\Omega$  par prolongement analytique), ce qui constitue une contradiction.  $\square$

## 2.8 Conditions d'optimalité du premier ordre

Dans la recherche de conditions d'optimalité pour le problème (2.1), nous sommes autorisés à ne considérer que des champs de vecteurs  $V$  qui respectent à la fois la contrainte de volume et la contrainte de convexité. L'égalité suivante, qui est une conséquence simple de la relation  $\lambda_k(l\Omega) = \frac{\lambda_k(\Omega)}{l^2}$ , nous permet de nous affranchir de la contrainte de volume :

$$\min_{|\Omega|=1, \Omega \text{ convexe}} \lambda_2(\Omega) = \min_{\Omega \text{ convexe}} |\Omega| \lambda_2(\Omega). \quad (2.16)$$

Dans la suite de l'étude des conditions d'optimalité du premier ordre, nous utiliserons la relation (2.16). Nous déterminons dans cette section les conditions d'optimalité du premier ordre vérifiées par un ouvert convexe optimal  $\Omega^*$  du plan qui minimise  $\lambda_2$  sous contrainte de convexité dont le théorème 8 assure l'existence. Afin de pouvoir calculer les variations de domaines, nous aurons besoin de supposer  $\Omega^*$  de classe  $C^{1,1}$  (régularité légèrement supérieure à celle que nous avons pu établir dans la proposition 11). Nous rappelons les notations usuelles suivantes :

$$d(J(\Omega))(\Omega, V) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_\varepsilon) - J(\Omega_0)}{\varepsilon},$$

où l'on a noté

$$J(\Omega_\varepsilon) = |\Omega_\varepsilon| \lambda_2(\Omega_\varepsilon) \text{ et } \Omega_\varepsilon = \{(Id + \varepsilon V)(x), x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Cette dérivée (si elle existe) est appelée dérivée de la fonction  $J$  par rapport à  $\Omega$  dans la direction du champ de vecteur  $V$ .

Le point délicat du problème qui nous intéresse est donc le traitement de la contrainte de convexité. La perturbation de la frontière de  $\Omega^*$  par un champ de vecteur quelconque peut éventuellement ne pas préserver la contrainte de convexité. Nous sommes amenés à considérer deux situations géométriques distinctes :

### 2.8.1 Sur les parties strictement convexes

Il est naturel d'envisager que sur une partie strictement convexe toute perturbation est infinitésimalement admissible. Le lemme suivant publié dans [57] nous permettra de formaliser cette idée.

**Lemme 5** *Soit  $\psi$  une fonction strictement convexe de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et  $\psi_\varepsilon := \psi + \varepsilon h$  une petite perturbation (non nécessairement convexe) de cette fonction par une fonction  $h$  régulière. En notant  $\psi_\varepsilon^{**}$  la plus grande fonction convexe majorée par  $\psi_\varepsilon$ , on a l'estimation*

$$\|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = o(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \text{ tend vers } 0.$$

**Démonstration**  $\psi$  étant une fonction strictement convexe sur  $[0, 1]$  il existe une fonction croissante  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\gamma(r) > 0$  pour  $r > 0$  et

$$\psi(x) - \psi(x_0) \geq \psi'(x_0)(x - x_0) + \gamma(|x - x_0|) \text{ pour tout } x, x_0 \in [0, 1]. \quad (2.17)$$

Notons de plus que  $\gamma$  vérifie la propriété

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \gamma(r)/r < \infty. \quad (2.18)$$

Supposons

$$\|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon \|h_\varepsilon^{**} - h\|_\infty = |h_\varepsilon^{**} - h|(x_\varepsilon^0)$$

où  $h_\varepsilon^{**}$  est définie par la relation  $\psi_\varepsilon^{**} := \psi + \varepsilon h_\varepsilon^{**}$ . Par définition de  $\psi_\varepsilon^{**}$  on a

$$\psi_\varepsilon^{**}(x_\varepsilon^0) = \sup_{(p,a) \in \mathbb{R}^2} \{p \cdot x_\varepsilon^0 + a \text{ où } p \cdot x + a \leq \psi_\varepsilon(x) \text{ sur } [0, 1]\}.$$

D'où par changement de variable ( $p \leftrightarrow p/\varepsilon$  et  $a \leftrightarrow a/\varepsilon$ )

$$(h_\varepsilon^{**} - h)(x_\varepsilon^0) = \sup_{(p,a) \in \mathbb{R}^2} \left\{ p \cdot x_\varepsilon^0 + a - \frac{\psi(x_\varepsilon^0)}{\varepsilon} - h(x_\varepsilon^0); p \cdot x + a - \frac{\psi(x)}{\varepsilon} - h(x) \leq 0 \text{ sur } [0, 1] \right\}.$$

On obtient alors en posant  $b = p \cdot x_\varepsilon^0 + a - \frac{\psi(x_\varepsilon^0)}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} (h_\varepsilon^{**} - h)(x_\varepsilon^0) &= \sup_{(p,b) \in \mathbb{R}^2} \left\{ b - h(x_\varepsilon^0) \text{ où } b + p(x - x_\varepsilon^0) + \frac{\psi(x_\varepsilon^0) - \psi(x)}{\varepsilon} - h(x) \leq 0 \text{ sur } [0, 1] \right\} \\ &\geq \sup_{b \in \mathbb{R}} \left\{ b - h(x_\varepsilon^0) \text{ où } b + \frac{\psi'(x_\varepsilon^0)}{\varepsilon}(x - x_\varepsilon^0) + \frac{\psi(x_\varepsilon^0) - \psi(x)}{\varepsilon} - h(x) \leq 0 \text{ sur } [0, 1] \right\} \\ &\geq \sup_{b \in \mathbb{R}} \left\{ b - h(x_\varepsilon^0) \text{ où } b - \frac{\gamma(|x - x_\varepsilon^0|)}{\varepsilon} - h(x) \leq 0 \text{ sur } [0, 1] \right\} \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \left\{ h(x) - h(x_\varepsilon^0) + \frac{\gamma(|x - x_\varepsilon^0|)}{\varepsilon} \right\} =: h(x_\varepsilon) - h(x_\varepsilon^0) + \frac{\gamma(|x_\varepsilon - x_\varepsilon^0|)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

l'avant dernière minoration provenant de (2.17). On remarque alors que nécessairement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x_\varepsilon - x_\varepsilon^0| = 0$$

car  $\gamma(r) > 0$  pour  $r > 0$  et  $\gamma$  est une fonction croissante. On a donc

$$0 \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h_\varepsilon^{**} - h)(x_\varepsilon^0) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h(x_\varepsilon) - h(x_\varepsilon^0)) = 0$$

pour peu que  $h$  soit suffisamment régulière. Ceci démontre le lemme car

$$\|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon \|h_\varepsilon^{**} - h\|_\infty = o(\varepsilon).$$

□

Nous pouvons à présent en déduire les conditions d'optimalité sur les parties strictement convexes du bord.

**Proposition 14** *Soit  $u$  la seconde fonction propre du laplacien-Dirichlet de  $\Omega^*$ . Supposons  $\Omega^*$  de classe  $C^{1,1}$ , il existe une constante  $\alpha$  telle que  $|\nabla u| = \alpha$  sur toutes les parties strictement convexes de  $\partial\Omega^*$ . De plus,  $\alpha$  est donnée par la formule explicite*

$$\alpha^2 = \frac{\lambda_2}{|\Omega^*|}. \quad (2.19)$$

**Démonstration** Soit  $\gamma$  une partie strictement convexe de  $\partial\Omega^*$  et  $V$  un champ de vecteur à support contenu dans un voisinage de  $\gamma$ . Nous souhaitons obtenir une relation du type

$$\int_\gamma \left( \lambda_2(\Omega) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 |\Omega| \right) V \cdot n d\sigma = 0. \quad (2.20)$$

qui aurait pour conséquence l'égalité cherchée :

$$\lambda_2(\Omega) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 |\Omega| \equiv 0.$$

Encore une fois, rappelons que (2.20) n'est pas une conséquence directe des formules classiques de dérivation : rien ne prouve à priori que le champ  $V$  préserve la convexité ; la quantité (2.20) n'est donc pas nécessairement nulle.

Notre résultat étant de nature locale, nous pouvons supposer  $\gamma$  paramétrée par une fonction strictement convexe  $\psi$  définie sur  $[0, 1]$ , et le bord de  $\Omega_\varepsilon$  (non nécessairement convexe) représenté par le graphe d'une fonction  $\psi_\varepsilon : = \psi + \varepsilon h$ . Comme dans le lemme 5, nous introduisons  $\psi_\varepsilon^{**}$  ; la plus grande fonction convexe majorée par  $\psi_\varepsilon$ . D'après le lemme 5, nous avons l'estimation

$$\|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = o(\varepsilon) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En notant  $\Omega_\varepsilon^{**}$  l'enveloppe convexe de  $\Omega_\varepsilon$  (de frontière localement le graphe de  $\psi_\varepsilon^{**}$ ), nous obtenons à l'aide du lemme 2

$$|\lambda_2(\Omega_\varepsilon^{**}) - \lambda_2(\Omega_\varepsilon)| \leq C \|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = o(\varepsilon) \text{ avec } C > 0.$$

Nous avons de plus d'après la formule d'Hadamard (cf. [41], [79], [80])

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Omega_\varepsilon) &= \lambda_2(\Omega) - \varepsilon \int_\gamma \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 V.n d\sigma + o(\varepsilon) \\ &= \lambda_2(\Omega) - \varepsilon \int_\gamma \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

où  $n_2(\sigma)$  est la seconde composante du vecteur normal extérieur. Nous déduisons de ces deux relations

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon^{**}) = \lambda_2(\Omega) - \varepsilon \int_\gamma \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma + o(\varepsilon). \quad (2.21)$$

Nous pouvons estimer la variation de volume de la même manière :

$$|\Omega_\varepsilon^{**}| - |\Omega_\varepsilon| \leq \int_{[0,1]} \|\psi_\varepsilon^{**} - \psi_\varepsilon\|_\infty = o(\varepsilon)$$

et toujours d'après les formules d'Hadamard

$$|\Omega_\varepsilon| = |\Omega| + \int_\gamma h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma + o(\varepsilon).$$

D'où

$$|\Omega_\varepsilon^{**}| = |\Omega| + \int_\gamma h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma + o(\varepsilon). \quad (2.22)$$

De (2.21) et (2.22) on déduit finalement

$$\lambda_2(\Omega_\varepsilon^{**}) |\Omega_\varepsilon^{**}| = \lambda_2(\Omega) |\Omega| + \varepsilon \int_\gamma \left( \lambda_2(\Omega) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 |\Omega| \right) h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma + o(\varepsilon).$$

Ceci établit la différentiabilité de l'application  $\varepsilon \mapsto \lambda_2(\Omega_\varepsilon^{**}) |\Omega_\varepsilon^{**}|$ . Cette variation préservant par définition la convexité, on a par optimalité

$$\int_\gamma \left( \lambda_2(\Omega) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 |\Omega| \right) h(\sigma) n_2(\sigma) d\sigma = 0$$

pour toute perturbation localisée  $h$ . Ce qui nous fournit bien (2.19).  $\square$

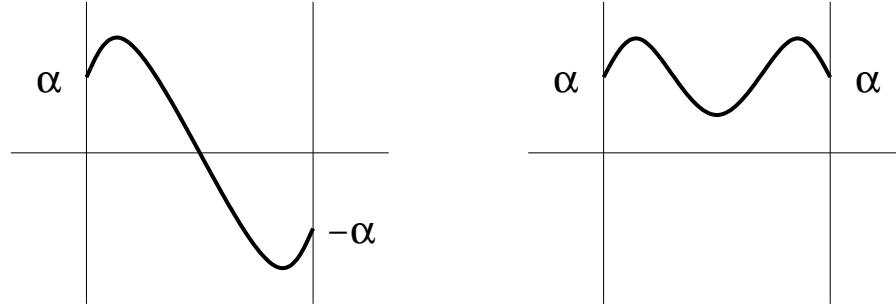


FIG. 2.5: Exemples de graphes de  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , lorsque la ligne nodale de  $u$  touche le segment (à gauche), et lorsqu'elle ne le touche pas (à droite).

### 2.8.2 Sur les parties plates

Comme dans le paragraphe précédent, nous devons être attentifs à ce que nos champs de vecteurs préservent bien la contrainte de convexité. Il est clair intuitivement que les perturbations locales qui préservent la convexité sur des parties plates seront "moins nombreuses" que celles que nous avons pu envisager sur une partie strictement convexe. Nous nous attendons donc à ce que les informations obtenues par de telles déformations soient moins riches que sur les parties strictements convexes.

Soit  $\alpha$  la constante définie par 2.19.

**Proposition 15** *Soit  $S$  un segment inclus dans le bord de  $\Omega^*$  (que l'on suppose à nouveau de régularité  $C^{1,1}$ ), soit  $t : [A, B] \rightarrow \partial\Omega^*$  un paramétrage de  $S$ , considérons  $\varphi(t) = |\nabla u(t)|^2 - \alpha^2$ . Il existe une fonction  $w$  positive, deux fois dérivable sur  $[A, B]$ , admettant  $A$  et  $B$  comme racines triples, telle que :*

$$\varphi(t) = w''(t), \quad \forall t \in [A, B].$$

**Remarque 12** *Cette proposition a pour corollaire le fait que la fonction  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  s'annule au moins trois fois sur un segment  $[A, B]$  qui ne rencontre pas la ligne nodale (fait que nous serons amenés à utiliser dans l'étude des parties plates). La fonction  $w$  étant positive, le graphe de  $|\nabla u(t)|^2$  est du type de ceux de la figure 2.5.*

**Démonstration** Nous obtenons la condition d'optimalité de la proposition en dérivant à nouveau par rapport à la forme. Le point important est à nouveau le choix du champ de vecteur par rapport auquel se fait la dérivation : seuls les champs de vecteurs concaves (dans la situation où  $\Omega^*$  est en dessous de  $S$ ) préservent la contrainte de convexité infinitésimalement. Nous aurons donc à la place de la relation 2.20, les relations suivantes;

$$d^+(J(\Omega))(\Omega, V) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega_0)}{t} \geq 0, \text{ d'où}$$

$$\int_{\partial\Omega} \left( \lambda_2(\Omega) - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 |\Omega| \right) V.n d\sigma \geq 0 \text{ soit :}$$

$$\int_A^B \left( \alpha^2 - |\nabla u|^2(x) \right) v(x) dx \geq 0,$$

pour tout champ de vecteur du type  $V(x) = v(x)n(x)$  où  $n(x)$  désigne le champ en  $x$  normal et  $v$  une fonction concave. Avec les notations de la proposition, cela se traduit par

$$\int_A^B \varphi(x) v(x) dx \leq 0, \text{ pour toute fonction } v \text{ concave sur } [A, B]. \quad (2.23)$$

Montrons que cette dernière condition est équivalente à  $\varphi = w''$  où  $w$  est positive sur  $[A, B]$  qui admet  $A$  et  $B$  comme points triples :

- Supposons  $\varphi = w''$  où  $w$  est positive sur  $[A, B]$  et admet  $A$  et  $B$  comme points triples. On retrouve par deux intégrations par parties successives la relation (5.11).
- Supposons (5.11) vérifiée. Posons

$$\varphi_1(x) = \int_A^x \varphi(t) dt \text{ et } \varphi_2(x) = \int_A^x \varphi_1(t) dt.$$

Il est clair que

$$\varphi_2(A) = \varphi_1(A) = \varphi(A) = 0 \text{ et } \varphi_2'' = \varphi.$$

Remarquons qu'en substituant  $v$  dans (5.11) par les fonctions concaves;  $1, -1, x, -x$  nous obtenons

$$\varphi_2(B) = \varphi_1(B) = \varphi(B) = 0.$$

Il reste à prouver  $\varphi_2 \geq 0$  toujours à l'aide de l'inégalité (5.11). On intègre cette dernière par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_A^B \varphi(t) v(t) dt &= [\varphi_1(t) v(t)]_A^B - \int_A^B \varphi_1(t) v'(t) dt \leq 0 \text{ d'où :} \\ \int_A^B \varphi(t) v(t) dt &= [\varphi_1(t) v(t)]_A^B - [\varphi_2(t) v'(t)]_A^B + \int_A^B \varphi_2(t) v''(t) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Soit

$$\int_A^B \varphi(t) v(t) dt = \int_A^B \varphi_2(t) v''(t) dt \leq 0$$

pour toute fonction  $v$  concave sur  $[A, B]$ , c'est à dire pour toute  $v''$  négative. D'où  $\varphi_2 \geq 0$  et l'équivalence cherchée.  $\square$



## 2.9 Étude des parties plates

Nous nous proposons dans cette partie de démontrer que le bord d'un ouvert optimal possède exactement deux parties plates. Nous supposerons dans toute la suite de cette section (comme nous l'avons fait dans la section précédente) que le bord de la forme optimale  $\Omega^*$  possède la régularité  $C^{1,1}$ . Cette hypothèse ne semble pas trop restrictive, car en accord avec la conjecture de Troesch : le stade possède bien la régularité  $C^{1,1}$ .

Remarquons en premier lieu que l'ouvert optimal possède au moins une partie plate.

### 2.9.1 L'ouvert optimal possède au moins une partie plate

Rappelons la définition suivante :

**Définition 3** Soit  $\Omega$  un ouvert du plan et  $u$  la seconde fonction propre solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_2 u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'ensemble  $N = \overline{\{x \in \Omega; u(x) = 0\}}$  est appelé *ligne nodale* de  $u$ .

Nous déduirons l'existence d'une partie plate du lemme clé suivant :

**Lemme 6** Soit  $\Omega$  un ouvert  $C^{1,1}$ ,  $u$  sa seconde fonction propre. On a alors pour tout point  $M \in \partial\Omega$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n}(M) = 0 \right) \Leftrightarrow (M \in N).$$

où le vecteur  $n$  désigne la normale extérieure en  $M$ .

#### Démonstration

- Si  $M \in N$ , il est clair que  $\frac{\partial u}{\partial n}(M) = 0$  : le point  $M$  se trouve en effet à l'intersection de deux lignes de niveau non tangentes (voir le lemme 7 ci-après) de la fonction propre.
- Si  $\frac{\partial u}{\partial n}(M) = 0$ , on a  $M \in N$  d'après le principe du maximum de Hopf (voir [36] page 34).  $\square$

**Proposition 16** Supposons  $\Omega^*$  de régularité au moins  $C^{1,1}$ . Il existe un segment d'intérieur non vide inclus dans  $\partial\Omega^*$ .

**Démonstration** Supposons par l'absurde  $\partial\Omega^*$  strictement convexe. D'après la proposition 14, le gradient de  $u$  est de norme constante égale à  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{|\Omega^*|}}$  le long de  $\partial\Omega^*$ . De plus le théorème de Melas-Alessandrini assure que la ligne nodale de la seconde fonction propre intersecte  $\partial\Omega^*$  en exactement deux points. Soit  $M$  un de ces points; d'après le lemme 6, on a  $\frac{\partial u}{\partial n}(M) = 0 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_2}{|\Omega^*|}}$ , d'où la contradiction.  $\square$

### 2.9.2 Un résultat concernant la ligne nodale de la seconde fonction propre

Pour prouver que  $\Omega^*$  possède au moins deux segments, nous allons d'abord montrer la proposition suivante dont la démonstration a été fortement inspirée de l'article [61] :

**Proposition 17** *Soit  $\Omega$  un ouvert convexe de classe  $C^{1,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ . Supposons qu'il existe exactement un segment  $S$  d'intérieur non vide inclus dans  $\partial\Omega$ . L'ensemble  $S \cap N$  contient alors au plus un point.*

**Remarque 13** *Ce résultat ne nécessite aucune condition d'optimalité sur le gradient de la seconde fonction propre.*

**Corollaire 3** *Un ouvert de classe  $C^{1,1}$  qui minimise  $\lambda_2$  sous contrainte de volume et de convexité possède au moins deux parties plates.*

**Démonstration** Supposons que cet ouvert possède une seule partie plate. Sa ligne nodale, qui touche la frontière de  $\Omega^*$  en exactement deux points (toujours d'après [61] et [3]), intersecterait, d'après la proposition précédente, la partie strictement convexe en un point  $M$ . On conclut à nouveau en remarquant que dans une telle situation,  $\frac{\partial u}{\partial n}(M) = 0 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_2}{|\Omega^*|}}$  (d'après le lemme 6 et la proposition 14).  $\square$

Revenons à présent à la preuve de la proposition 17. Raisonnons par l'absurde; désignons par  $S$  la partie plate de la frontière et par  $A$  et  $B$  les deux points de contact entre  $S$  et la ligne nodale  $N$ . On se donne un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est de direction  $S$ . Nous décomposerons la preuve de la proposition, très largement inspirée de l'article [61], en 5 lemmes.

**Lemme 7** *Supposons l'axe de coordonnées  $x_1$  porté par la partie plate  $S$ . Il existe,  $\varepsilon > 0$  tel que :*

$$\begin{cases} |u|(x) + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|(x) > 0 \text{ dans } \Omega \cap \{x \text{ tels que } 0 < |A - x| < \varepsilon\} \text{ et,} \\ |u|(x) + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|(x) > 0 \text{ dans } \Omega \cap \{x \text{ tels que } 0 < |B - x| < \varepsilon\}. \end{cases}$$

**Démonstration** Nous pouvons construire un ouvert  $\Omega_1$  contenu dans  $\Omega$ , de classe  $C^\infty$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_2 u \text{ dans } \Omega_1, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap B(A, r_0), \end{cases}$$

pour  $r_0$  suffisamment petit. On suit alors la preuve du lemme 2.1 de l'article de Melas. Il est clair que  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$  par régularité elliptique. On peut supposer de plus  $B(A, r_0) \cap \Omega \subset \Omega_1$  quitte à diminuer  $r_0$ .

• Montrons que  $A$  est un zéro de  $u$  d'ordre fini : on définit par symétrie par rapport à  $S$  la fonction  $v$  dans l'ensemble  $B(A, r_0)$  :

$$\begin{cases} v(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) & \text{si } x_2 \geq 0, \\ v(x_1, x_2) = -u(x_1, -x_2) & \text{si } x_2 < 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction  $v$  est de classe  $C^2$  sur  $B(A, r_0)$  en utilisant la majoration

$$|\Delta u|(x) \leq \lambda_2 |u|(x) \text{ pour } x \in \overline{B(A, r_0) \cap \Omega}$$

pour prouver la continuité de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ . Elle vérifie de plus la relation

$$-\Delta v = \lambda_2 v \text{ dans } B(A, r_0);$$

Elle est donc analytique toujours par régularité elliptique.  $A$  est donc un zéro interne de la fonction propre  $v$  et celle-ci ne peut avoir un zéro de multiplicité infini d'après l'analyticité. La fonction  $u$  a donc elle aussi un zéro d'ordre fini en  $A$ .

• Montrons que  $N$  approche  $S$  non tangentiell ment : pour simplifier les écritures, nous supposons  $A = (0, 0)$ . On peut écrire d'après ce qui précède

$$u(x) = p_m(x) + O(|x|^{m+1}), \quad (2.24)$$

où  $p_m$  est un polynôme homogène de degré exactement  $m \geq 1$ . Le polynôme  $\Delta p_m$  est lui aussi homogène mais de degré  $m - 2$ . De l'égalité

$$-\Delta u = \lambda_2 u,$$

on déduit

$$\Delta p_m = O(|x|^{m-1}).$$

Nous déduisons de ces égalités

$$\Delta p_m = 0 \text{ dans } B(A, r_0) \cap \Omega.$$

$p_m$  est donc un polynôme harmonique s'annulant sur  $S \cap B(A, r_0)$ . On peut donc d'après le principe de symétrie de Schwarz (voir [58] page 281) prolonger  $p_m$  en une fonction harmonique sur un disque contenant l'origine. Or toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe qui, ici, ne peut être qu'une fonction  $f$  du type  $z \mapsto a.z^n$  par homog nit  (où  $a$  est imaginaire pur car  $f$  est réelle en  $x_2 = 0$ ). On peut donc écrire en coordonnées polaires :

$$p_m(r, \theta) = cr^m \sin(m\theta) \text{ où } c \neq 0. \quad (2.25)$$

Soit  $(r, \theta)$  un point de  $N \cap \Omega$ . On considère les points de coordonnées  $(r, 0)$  et  $(r, -\pi)$ ; On a  $u(r, -\pi) = u(r, 0) = u(r, \theta)$ . Il existe donc d'après le théorème de Rolle  $\theta_1(r)$  et  $\theta_2(r)$  tels que :

$$-\pi < \theta_1(r) < \theta < \theta_2(r) < 0$$

D'après (2.24) et (2.25), il existe  $C > 0$  vérifiant  $|\cos(m\theta_i(r))| \leq Cr$  pour  $i = 1, 2$ . Si on se fixe  $r < \frac{1}{2C}$ , on a

$$|\cos(m\theta_i(r))| < \frac{1}{2}$$

d'où

$$-2\pi + \frac{\pi}{4m} < \theta_1(r) < \theta < \theta_2(r) < -\pi - \frac{\pi}{4m}.$$

Cela prouve bien que  $N$  approche  $S$  non tangentiellement.

**Remarque 14** *Le même raisonnement montre que la ligne nodale s'approche orthogonalement. Il faut pour cela utiliser le fait que dans une telle situation on a en fait  $m \leq 2$  (voir [74]).*

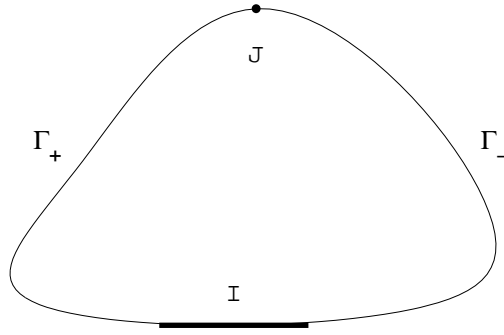


FIG. 2.6: Un ouvert possédant une seule partie plate

• Montrons à présent le lemme : supposons  $A = (0, 0) \in N$ . D'après ce qui précède, il existe  $\delta, c_3 > 0$  et  $c_1, c_2$  des constantes strictement négatives telles que :

$$0 < r < \delta \text{ et } c_1 < \theta < c_2 \Rightarrow \sin(\theta) > c_3. \quad (2.26)$$

De plus, on montre à l'aide de (2.24) et (2.25) que ( $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$  sur  $S$ ) :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = mc'r^{m-1} \sin((m-1)\theta) + O(r^m).$$

Supposons  $u(r, \theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = 0$ , alors il existe  $c_4 > 0$  telle que :

$$|\sin(m\theta)| \leq c_4 r \text{ et } |\sin((m-1)\theta)| \leq c_4 r \quad (2.27)$$

d'où  $|\sin(\theta)| \leq 2c_4 r$ . En confrontant (2.26) et (2.27), on voit que pour  $r$  assez petit, on ne peut avoir

$$u(r, \theta) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(r, \theta) = 0$$

d'où le lemme.  $\square$

Nous aurons besoin dans ce qui suit des notations suivantes :

$$\begin{cases} \Omega^+ = \{x \in \Omega \text{ tels que } u(x) > 0\}, \\ \Omega^- = \{x \in \Omega \text{ tels que } u(x) < 0\}. \end{cases}$$

Nous continuerons à supposer  $A = (0, 0)$ . Soient  $I$  et  $J$  des intervalles fermés de la frontières (éventuellement ponctuels) tels que  $(0, 0) \in I$  et  $J$  parallèle à  $I$ . Soient  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  les deux arcs ouverts connexes formant  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$  (voir figure 2.6). D'après le principe de Hopf, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0 \text{ sur } \Gamma^+ \text{ et} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \text{ sur } \Gamma^-. \end{cases} \quad (2.28)$$

La fonction propre étant constante sur la frontière, son gradient suit la normale et on a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ sur } I \cup J.$$

On définit de plus

$$v_t(x) = e^{-tx_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{tx_1} u(x)) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + u(x). \quad (2.29)$$

et on pose

$$N_t = \overline{\{x \in \Omega : v_t(x) = 0\}}$$

Cette dernière fonction propre vérifie

$$-\Delta v_t = \lambda_2 v_t \text{ dans } \Omega \text{ et } v_t \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

D'après (2.28) et (2.29), on a  $N_t \cap \partial\Omega \subseteq I \cup J$  et  $v_t = 0$  sur  $I \cup J$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 8** *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un sous-domaine  $\Omega_t$  de  $\Omega$  (c'est-à-dire un sous-ensemble ouvert connexe) vérifiant  $\partial\Omega_t \subseteq N_t \cup I \cup J$ .*

**Démonstration** -Le lemme 7 assure l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  est non nul sur  $N \cap \{x \in \Omega : 0 < |x| < \varepsilon\}$ . Cela prouve d'après le théorème des fonctions implicites que  $N \cap \{x \in \Omega : 0 < |x| < \varepsilon\}$  est une courbe paramétrée par  $x_2$  de tangente non parallèle à  $x_1$ . Ce raisonnement fait en  $A = (0, 0)$  reste bien sûr valable en  $B$ . Il existe donc  $\eta > 0$  tel que  $N \cap \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \eta\}$  est la réunion de deux arcs simples disjoints dont le

premier (respectivement le second) a pour points frontières un point de la droite  $x_2 = \eta$  et le point  $A$  (respectivement le point  $B$ ). Supposons qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que le lemme 8 soit en défaut; On définit

$$U^+ = \{x \in \overline{\Omega} : v_{t_0}(x) > 0\} \text{ et } U^- = \{x \in \overline{\Omega} : v_{t_0}(x) < 0\}.$$

Ces deux ensembles sont les deux composantes connexes de  $\overline{\Omega} \setminus (N_{t_0} \cup I \cup J)$ . Si ce n'était pas le cas, il existerait une autre composante, où par exemple on aurait  $v_{t_0}(x) > 0$ , sans points de contact avec  $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . Cette composante permettrait de définir  $\Omega_{t_0}$ .

Soit  $\gamma_1$  un arc de ligne nodale de  $u$  que nous avons défini ci-dessus. On peut supposer par exemple  $\gamma_1 \subset U^+$  car on a vu que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} \neq 0$  sur  $\gamma_1$ . Donc  $U^+ \setminus \gamma_1$  est connexe.

Soient  $y = (y_1, \eta) \in \Gamma^+$  et  $x = (x_1, \eta) \in \gamma_1$ . On peut joindre ces points par un chemin continu que l'on nomme  $\gamma_2$ . Soit  $\gamma_3$  l'arc frontière reliant  $y$  à  $A = (0, 0)$ . Alors  $\gamma$  définie comme la réunion des arcs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  est une courbe simple fermée qui d'après le théorème de Jordan délimite un domaine borné  $W$  de frontière  $\gamma$ .  $\Omega$  étant convexe donc simplement connexe, on a  $W \subset \Omega$ . On a de plus  $v_{t_0}(x) \geq 0$  sur  $\gamma$ ,  $\Gamma^- \cap \overline{W} = \emptyset$  et  $U^-$  connexe donc  $v_{t_0}(x) \geq 0$  sur  $W$  (raisonner par l'absurde). D'après le principe du maximum, on a  $v_{t_0}(x) > 0$  sur  $W$ .

Cherchons à présent à contredire cette dernière constatation : l'arc  $\gamma_2$  ne rencontre pas l'axe  $x_2 = 0$ , il existe donc  $\eta_1 > 0$  tel que  $\gamma_2$  ne rencontre pas l'axe  $x_2 = \eta_1$ . Or cette droite horizontale rencontre  $\gamma_1$  et  $\Gamma^+$  en deux points dont le segment qui les relie est inclus dans  $\overline{W}$ . La fonction  $e^{t_0 x_1} u(x)$  s'annule en ces deux points puisque  $u$  s'annule en ces points. D'après le théorème de Rolle, on arrive à la contradiction cherchée.  $\square$

Étudions à présent les propriétés de ces ensembles  $(\Omega_t)_{t \in \mathbb{R}}$  :

**Lemme 9** *Les ensembles  $(\Omega_t)_{t \in \mathbb{R}}$  précédemment définis vérifient :*

1. *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega_t$  est unique.*
2. *On a nécessairement  $v_t > 0$  ou  $v_t < 0$  sur tout  $\Omega_t$ .*
3.  $\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2(\Omega)$ .
4.  $\Omega_t$  est simplement connexe.
5. *Il existe  $\rho > 0$ , tel que  $\Omega_t$  contient une boule de rayon  $\rho$ .*

### Démonstration

1.  $\Omega_t$  est unique d'après le lemme 4 des ensembles nodaux;  $v_t$  serait fonction propre sur la réunion de ces deux ouverts strictement inclus dans  $\Omega$  d'où la contradiction.
2. Vient de 1.
3. Vient de 2.

4. Est déduit du fait que  $\Omega$  est simplement connexe et de 1.

5. Vient de Haymann [40].

□

**Lemme 10** *Il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  strictement positives telles que :*

$$t > C_1 \Rightarrow v_t < 0 \text{ et } t < -C_2 \Rightarrow v_t > 0$$

**Démonstration** Soit  $z \in \Gamma^+$ . On a, par continuité,  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0$  dans un voisinage  $\overline{B}(z, \rho) \cap \overline{\Omega}$  où  $\rho > 0$ . Quitte à diminuer  $\rho$ , on peut supposer  $\overline{B}(z, \rho) \cap \overline{\Omega}^- = \emptyset$  où  $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$  puisque  $z \in \partial\Omega^+$ . On pose  $K = \overline{B}(z, \rho) \cap \overline{\Omega}$ . D'après la remarque de monotonie 5, on a :

$$\lambda_1(\Omega^+) = \lambda_2(\Omega) < \lambda_1(\Omega^+ \setminus K).$$

Par continuité des valeurs propres de Dirichlet sous des déformations régulières (voir [20] page 423), il existe un compact  $E$  inclus dans  $\Omega^-$  tel que  $\lambda_1(\Omega \setminus (E \cup K)) > \lambda_2(\Omega)$ . Soit  $M = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right| \right\}$  et  $\alpha = \inf_{x \in E} \{|u(x)|\} > 0$ . On se donne  $t > \alpha^{-1}M$ , on a :

$$v_t > 0 \text{ dans } K \text{ et } v_t > 0 \text{ dans } E \quad (2.30)$$

par construction. On a donc  $\Omega_t \subseteq \overline{\Omega} \setminus K$  (penser à considérer  $\partial\Omega_t$ ). Or d'après le lemme 9 3., on a :

$$\lambda_1(\Omega_t) = \lambda_2(\Omega) < \lambda_1(\Omega \setminus (E \cup K)).$$

Toujours d'après la monotonie du corollaire 1, on a nécessairement  $\Omega_t \cap E \neq \emptyset$ . Du lemme 9 2. et de (2.30), on a bien trouvé  $C_1 = \alpha^{-1}M > 0$  tel que :

$$t > C_1 \Rightarrow v_t < 0.$$

On raisonne de la même manière pour construire  $C_2$ . □

**Lemme 11** *Les ensembles*

$$\begin{aligned} T^+ &= \{t \in \mathbb{R} : \text{tels que } v_t > 0 \text{ dans } \Omega_t\} \text{ et} \\ T^- &= \{t \in \mathbb{R} : \text{tels que } v_t < 0 \text{ dans } \Omega_t\} \end{aligned}$$

*sont des ensembles fermés non vides.*

**Démonstration** Le lemme 10 prouve que ces deux ensembles sont non vides, montrons par exemple que  $T^+$  est fermé. Supposons  $t_j \in T^+ \rightarrow t_0$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$  et  $t_0 \notin T^+$ . On a donc d'après le lemme 9 :

$$v_{t_j} > 0 \text{ sur } \Omega_{t_j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_{t_0} < 0 \text{ sur } \Omega_{t_0}.$$

D'après 5. du lemme 9, il existe  $\rho > 0$ , tel que chaque élément de la suite  $(\Omega_{t_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$  ainsi que  $\Omega_{t_0}$  contient un disque de rayon  $B(x_j, \rho)$ .  $\Omega$  étant borné, il existe une sous-suite de  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  (que nous continuerons à noter  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ ) et un élément  $x_0 \in \overline{\Omega}$  tel que  $x_j \rightarrow x_0$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ . On a de plus  $B(x_0, \rho) \subset \overline{\Omega}$  et  $v_{t_0} \geq 0$  sur  $B(x_0, \rho)$  par convergence simple. Donc d'après le principe du maximum  $v_{t_0} > 0$  sur  $B(x_0, \rho)$ . De plus d'après l'unicité du lemme 9 1., la ligne nodale  $N_{t_0}$  ne sépare pas  $x_0$  de  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$ ; C'est à dire qu'il existe un chemin continu  $\zeta: [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega}$  tel que:  $\zeta(0) = x_0$ ,  $\zeta(1) \in \partial\Omega$  et l'image  $\zeta^*$  de  $\zeta$  ne rencontre pas  $N_{t_0} \cup I \cup J$ . Puisque  $x_0 \in B(x_j, \rho) \subset \Omega_{t_j}$ , pour  $j$  assez grand, on a  $\zeta^* \cap (N_{t_j} \cup I \cup J) \neq \emptyset$ . Il existe donc  $y_j \in \zeta^*$  tel que  $v_{t_j}(y_j) = 0$  et ceci pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  puisque toujours d'après l'unicité du lemme 9 1.  $v_{t_j} < 0$  sur  $\partial\Omega \setminus (I \cup J)$ . Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer  $y_j \rightarrow y_0 \in \zeta^*$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ . On a alors  $v_{t_j}(y_j) \rightarrow v_{t_0}(y_0) = 0$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$ . Donc  $y_0 \in N_{t_0} \cup I \cup J$  ce qui contredit  $(N_{t_0} \cup I \cup J) \cap \zeta^* = \emptyset$  d'où le lemme.  $\square$

**Démonstration** (de la proposition 17). D'après le lemme 11, nous avons pu en raisonnant par l'absurde construire une partition de  $\mathbb{R}$  en deux fermés disjoints, ce qui contredit sa connexité.  $\square$

### 2.9.3 Les parties plates sont exactement au nombre de 2

**Proposition 18** *Un ouvert  $\Omega^*$  solution du problème d'optimisation du théorème 8 ayant la régularité  $C^{1,\alpha}$  possède un bord contenant exactement deux segments d'intérieur non vide.*

**Démonstration** D'après la section précédente, il nous reste à prouver qu'un ouvert optimal suffisamment régulier ne peut avoir plus de deux parties plates. Supposons l'inverse et soit  $\Omega$  un ouvert qui vérifie les conditions d'optimalité décrites précédemment et qui possède au moins trois parties plates (figure 2.7). Soit  $[-A, A]$  une partie plate qui n'est

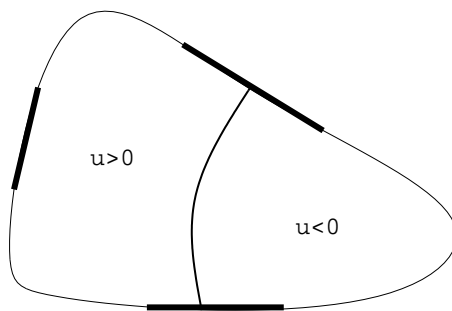


FIG. 2.7: Un ouvert convexe possédant trois parties plates



pas en contact avec la ligne nodale. On définit un repère orthogonal de premier axe ce segment  $[-A, A]$ , et nous supposons sans perdre en généralité que  $u$ , la seconde fonction propre de l'opérateur de Dirichlet est positive sur le domaine nodal en contact avec  $[-A, A]$ . On pose  $\varphi = \partial u / \partial y$  sur ce segment. D'après les conditions d'optimalité sur les parties plates 2.8.2, le graphe de  $\varphi$  a un comportement voisin de la figure 2.5. Ou tout du moins nous avons les trois propriétés suivantes :

- $\varphi$  est de signe constant sur  $[-A, A]$  (positive dans notre cadre).
- $\varphi'(A) \geq 0$  et  $\varphi'(A) \leq 0$ .
- $\varphi'$  s'annule avec changement de signe au moins trois fois sur  $[-A, A]$  et chacune de ces annulations détermine le point de départ d'une ligne nodale de  $\partial u / \partial y$  d'après le principe du maximum de Hopf. On note  $x_1, x_2$  et  $x_3$  les trois premiers zéros de  $\varphi'$ .

La fonction  $\varphi'$  est négative sur  $]x_1, x_2[$  on définit alors  $y_1$  par

$$\varphi'(y_1) = \inf_{[x_1, x_2]} \varphi' \text{ de sorte que } \varphi'(y_1) < 0.$$

On pose :

$$v_t = tu + \partial u / \partial x \text{ d'où } \partial v_t / \partial y = t\varphi + \varphi'.$$

$v_t$  vérifie alors pour  $t > 0$  suffisamment petit :

$$\partial v_t / \partial y(-A) > 0, \quad \frac{\partial v_t}{\partial y}(y_1) = t\varphi(y_1) + \varphi'(y_1) < 0 \text{ et } \frac{\partial v_t}{\partial y}(y_2) = t\varphi(x_2) > 0.$$

Donc  $\partial v_t / \partial n = -\partial v_t / \partial y$  s'annule au moins deux fois sur  $[-A, x_2]$  pour  $t$  suffisamment petit. Toujours d'après le principe du maximum de Hopf, ces deux zéros de  $\partial v_t / \partial n$  nous assurent l'existence de départ de lignes nodales de la fonction  $v_t$ .

On définit alors :

$$t^* = \sup_{T>0} \{ \partial v_t / \partial y \text{ s'annule au moins deux fois sur } [-A, x_2] \text{ pour tout } t \in [0, T] \}.$$

Nous venons de voir ci-dessus que cet ensemble est non vide; de plus il est majoré car pour  $t$  grand, il est clair que  $\partial v_t / \partial y = t\varphi + \varphi'$  est strictement positive sur tout le segment. La fonction  $\partial v_t / \partial y$  possède alors un zéro double en  $t^*$ . En effet, soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites décrivant les zéros des fonctions  $(\partial v_{t_n} / \partial y)_{n \in \mathbb{N}}$  associées à une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t^*$ . Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (respectivement  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) converge vers  $x \in ]-A, A[$  (respectivement vers  $y$ ) (on a  $\partial v_t / \partial y(-A) > 0$  et  $\partial v_t / \partial y(A) < 0$ ). On a nécessairement  $x = y$  d'après la définition de  $t^*$ . De plus, d'après le théorème de Rolle, la fonction  $\partial v_t / \partial y$  s'annule pour

tout  $n \in \mathbb{N}$  sur  $]x_n, y_n[$ ; Par continuité  $\partial v_t / \partial y$  possède un zéro double en  $t^*$ . Il reste à prouver l'impossibilité d'une telle situation.

La fonction  $v_t$  est analytique d'un côté du segment au voisinage du point  $t^*$  et nulle sur le segment. D'après le principe de symétrie de Schwarz (voir [58] page 280), on peut prolonger  $v_t$  au voisinage de ce point. Écrivons alors le développement en série de ce prolongement en  $t^*$  (pour simplifier les écritures, nous prendrons  $t^* = 0$ ) :

$$v_t(x, y) = \alpha_1 y + \alpha_2 xy + \text{termes d'ordre au moins 3},$$

Cela, car  $0 = \partial^2 v_t / \partial x^2(0, 0) = -\lambda_2 v_t(0, 0) - \partial^2 v_t / \partial y^2(0, 0)$  assure  $\partial^2 v_t / \partial y^2(0, 0) = 0$ . Le fait que  $\partial v_t / \partial y$  possède un zéro double en  $t^*$  nous donne alors :  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .  $v_t$  possède donc un développement en série ne comportant que des termes de degré supérieurs ou égaux à 3. Par récurrence immédiate en utilisant  $-\Delta v_t = \lambda_2 v_t$ , on prouve que  $v_t$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $(0, 0)$  ce qui est absurde d'après le principe du maximum fort, d'où la contradiction.  $\square$

#### 2.9.4 Les deux segments sont parallèles

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que les deux parties plates, dont nous avons montré l'existence dans la proposition 18, sont parallèles.

Nous désignerons par  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  ces deux segments et supposerons qu'ils forment un angle  $\beta \geq 0$ . On se fixe un système d'axe dont la première direction porte  $\Sigma_1$ . Soient  $[y_1, y_2]$  la projection de  $\Sigma_2$  sur l'axe des ordonnées et  $d$  l'ordonnée du point le plus haut de  $\partial\Omega^*$ . Pour tout  $y \in [0, d]$ , nous noterons  $[x_1(y), x_2(y)]$  la projection sur l'axe des abscisses de l'intersection de  $\Omega^*$  avec la droite horizontale d'ordonnée  $y$ . Pour mettre en évidence une contradiction, nous ferons appel à une formule du type Rellich que l'on pourra trouver dans [70].

Soit  $u$  une fonction propre du laplacien avec condition de Dirichlet associée à la valeur  $\lambda$ . Soit  $h = (h_1, \dots, h_N)$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^N$ , on a alors l'identité

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 h \cdot n d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - \lambda u^2) \operatorname{div} h dx + \sum_{i=1}^N \Sigma_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}.$$

Nous appliquons cette identité à  $u$  la seconde fonction propre de  $\Omega^*$  et au champ de vecteur de  $\mathbb{R}^2$  définit par  $h(x, y) = (h_1(y), 0)$ . On a alors

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^*} |\nabla u|^2 h_1 n_1 d\sigma = \int_{\Omega^*} h_1'(y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy.$$

Nous allons à présent exploiter les conditions d'optimalité du premier ordre établies au paragraphe 2.8 pour évaluer l'intégrale de bord. Nous utiliserons les relations

$$h_1 n_1 = 0 \text{ sur } \Sigma_1 \text{ et } h_1 n_1 = -\sin \beta h_1(t \sin \beta) \text{ le long de } \Sigma_2.$$

Celles-ci nous amènent à l'identité

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^*} |\nabla u|^2 h_1 n_1 d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^*} \alpha^2 h_1 n_1 d\sigma - \frac{\sin \beta}{2} \int_{\Sigma_2} w_2''(t) h_1(t \sin \beta) dt.$$

D'autre part, nous pouvons évaluer

$$\int_{\partial\Omega^*} h_1 n_1 d\sigma = \int_{\Omega^*} \frac{\partial h_1}{\partial x} dx dy = 0.$$

La fonction  $w_2$  ayant des zéros d'ordre 2 aux extrémités de  $\Sigma_2$ , nous obtenons après une double intégration par parties

$$\int_{\Sigma_2} w_2''(t) h_1(t \sin \beta) dt = \sin^2 \beta \int_{\Sigma_2} w_2(t) h_1''(t \sin \beta) dt.$$

Ce qui nous amène finalement à la relation

$$-\frac{\sin^3 \beta}{2} \int_{\Sigma_2} w_2(t) h_1''(t \sin \beta) dt = \int_{\Omega^*} h_1'(y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \quad (2.31)$$

et ceci pour toute fonction  $h_1$  suffisamment régulière. On peut alors définir une fonction  $h_1$  sur  $[0, d]$  ayant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} & - h_1'' > 0 \text{ sur } [y_1, y_2] \\ & - \int_{\Omega^*} h_1'(y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \int_0^d h_1'(y) \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) dy = 0. \end{aligned}$$

La fonction  $w_2$  étant, elle aussi, de signe constant sur  $\Sigma_2$ , l'égalité (2.31) entraîne nécessairement  $\sin \beta = 0$ .  $\square$

En conclusion, nous pouvons résumer nos résultats sous la forme suivante

**Théorème 15** *Soit  $\Omega^*$  un ouvert convexe de classe  $C^{1,1}$  qui minimise  $\lambda_2$  parmi les convexes de volume donné. Le bord de  $\Omega^*$  contient alors exactement deux segments d'intérieur non vide parallèles.*

## 2.10 Le stade ne minimise pas $\lambda_2$ sous contrainte de convexité et de volume

Après l'étude des parties plates, il pourrait apparaître fort probable que le stade minimise  $\lambda_2$ . Nous-mêmes ne sommes parvenus que tardivement à la conclusion qu'il n'en était rien :

### 2.10.1 Le stade n'est pas optimal

**Théorème 16** *Le stade, enveloppe convexe de deux disques tangents de même rayon, ne minimise pas  $\lambda_2$  sous contrainte de convexité et de volume.*

**Démonstration** Supposons que le stade soit un ouvert optimal. Nous allons prouver qu'il ne peut en fait vérifier la condition d'optimalité du premier ordre décrite dans la proposition 15 à savoir : la seconde fonction propre ne peut avoir sa dérivée normale constante sur un demi-arc de cercle  $C^+$  (voir figure 2.8). Supposons par l'absurde :

$$\partial u / \partial n = \text{Const sur } C^+.$$

Et considérons la fonction

$$w(x, y) = x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$$

définie sur le disque de la figure 2.8. On vérifie sans difficultés que pour  $x = r \cos(\theta)$  et

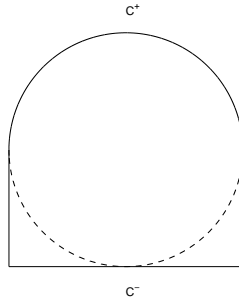


FIG. 2.8: *L'ouvert optimal ne contient pas d'arcs de cercle*

$y = r \sin(\theta)$  on a :

$$w(x, y) = w(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

La fonction  $w$  si le stade était optimal vérifierait alors :

$$\begin{aligned} \partial w / \partial n(x, y) &= \partial w / \partial r(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \theta}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0 \text{ sur } C^+ \text{ car } \frac{\partial u}{\partial r} = \text{Const sur } C^+. \end{aligned}$$

## 2.10 Le stade ne minimise pas $\lambda_2$ sous contrainte de convexité et de volume 49

En résumé,  $w$  vérifierait les propriétés :

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda_2 w \text{ dans le disque,} \\ w = 0 \text{ sur } C^+ \text{ et} \\ \partial w / \partial n = 0 \text{ sur } C^+. \end{cases}$$

Ce qui d'après le théorème d'unicité d'Holmgren entraînerait la nullité de la fonction  $w$  dans un voisinage de  $C^+$  puis par analyticité dans le disque tout entier; la fonction propre  $u$  serait radiale et serait donc nulle sur l'arc  $C^-$ , ce qui est absurde, car on sait d'après la partie 2.7.1 que la ligne nodale de  $u$  se situe sur un des axes de symétrie du stade. D'où la non optimalité du stade.  $\square$

**Remarque 17** *Le résultat précédent reste valable en dimension quelconque : un ouvert optimal ne peut contenir dans sa frontière des morceaux de sphère. La démonstration se déroule de la même manière en utilisant cette fois les fonctions  $x_i \frac{\partial u}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}$ , on montre comme précédemment que  $u$  serait à symétrie radiale dans  $\Omega^*$ .*

### 2.10.2 Autres conséquences

La démonstration que nous venons de présenter permet de répondre à une question très naturelle posée par G. Buttazzo : celle-ci concerne le problème de minimisation suivant :

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\Omega \subset D, |\Omega|=l} \lambda_1(\Omega)$$

où  $D$  est une zone de dessin ne contenant aucune boule de volume  $l$  (nous pensons par exemple à un rectangle assez fin). Que peut-on dire de la frontière de  $\partial\Omega^*$ ? L'ensemble  $\partial\Omega^* \cap D$  peut-il contenir des arcs de cercles (comme l'illustre la figure 2.9)?

Nous avons pu établir la proposition suivante :

**Proposition 19** *Soient  $D \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $l > 0$ . Si  $\Omega^*$  vérifie*

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\Omega \subset D, |\Omega|=l} \lambda_1(\Omega)$$

*alors nous sommes dans l'une des situations suivantes :*

- soit  $\Omega^*$  est une boule,
- soit  $\partial\Omega^* \cap D$  ne contient aucun morceau de sphère,

*si de plus  $D$  possède un axe de symétrie, alors ce même axe est aussi un axe de symétrie pour un ouvert optimal.*

**Démonstration** • Supposons que  $\Omega^*$  n'est pas une boule et que  $\partial\Omega^* \cap D$  contient un morceau de sphère. Exactement de la même manière que pour le stade, en considérant la même fonction auxiliaire, on établit une contradiction avec le théorème d'unicité de Holmgren (toujours grâce aux conditions d'optimalité du premier ordre).

• Pour montrer qu'il existe un ouvert optimal symétrique, on applique une symétrisation de Steiner par rapport à l'axe de symétrie de  $D$  (on pourra consulter [47] pour plus de détails) : soit  $u$  la première fonction propre associée à  $\Omega^*$ , considérons l'ouvert symétrisé  $\Omega_S^*$  et  $u_S$  la fonction de  $H_0^1(\Omega_S^*)$  obtenue par symétrisation de  $u$ . D'après l'hypothèse de symétrie de  $D$  et les propriétés de la symétrisation de Steiner, on a :

$$\begin{cases} \Omega_S^* \subset D, \\ |\Omega_S^*| = |\Omega^*| = l, \end{cases}$$

et de plus

$$\lambda_1(\Omega^*) = \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega^*} u^2 dx} \geq \frac{\int_{\Omega_S^*} |\nabla u_S|^2 dx}{\int_{\Omega_S^*} u^2 dx} \geq \lambda_1(\Omega_S^*)$$

ce qui établit bien notre proposition.  $\square$

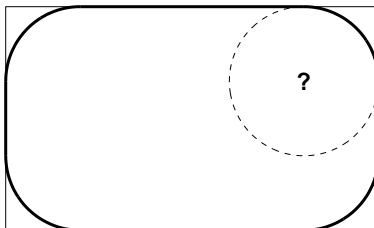


FIG. 2.9: Ouvert confiné dans une boîte

## 2.11 L'ouvert optimal n'est pas lisse

Nous avons démontré dans la proposition 11 qu'un ouvert convexe optimal est au moins de régularité  $C^1$ . Nous allons montrer ici qu'il ne peut être de régularité  $C^{2,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ .

**Théorème 18** *Un ouvert optimal  $\Omega^*$  ne peut être de régularité  $C^{2,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ .*

**Démonstration** Supposons  $\Omega^*$  de régularité  $C^{2,\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ . D'après les résultats classiques de régularité Hölderienne (que l'on trouvera dans [36] et [37]), la seconde fonction propre, que l'on note  $u$ , appartient à  $C^2(\overline{\Omega^*})$ .

On se fixe à présent un système de coordonnées dont l'axe des abscisses est parallèle aux deux segments du bord. La fonction  $v = \frac{\partial u}{\partial x}$  est donc nulle sur ces deux segments. Étudions plus précisément les lignes nodales de  $v$ .

D'après le lemme 6, tout zéro de la fonction  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  sur un segment est le point de départ d'une ligne nodale.  $u$  étant de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  s'annule aux extrémités de chaque segment; en effet si  $A$  désigne une de ces extrémités; on a d'après la proposition 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n}(A) = \lim_{B \rightarrow A} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n}(B) = 0$$

où  $B$  est un point du bord strictement convexe. D'après les secondes conditions d'optimalité de la proposition 15,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  s'annule au moins deux fois à l'intérieur de chaque segment. Nous venons donc de voir que  $v$  possède au moins quatre départs de lignes nodales sur chaque segment. Par des considérations géométriques élémentaires, on en conclut qu'il existe au moins trois ensembles nodaux de  $v$  inclus dans  $\Omega^*$ . La fonction  $v$  étant elle aussi une fonction propre associée à  $\lambda_2$ , ceci constitue une contradiction avec le théorème 4.  $\square$





## Chapitre 3

# Optimisation par algorithmes génétiques

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'abord d'exposer les méthodes d'optimisation génétique que nous mettrons ensuite en oeuvre. Nous commençons notre présentation par une description générale du fonctionnement d'un algorithme génétique afin de décrire dans un deuxième temps les méthodes que nous avons utilisées dans le cadre de l'optimisation de forme. Pour conclure, nous exposons les résultats obtenus à l'aide de ces techniques appliquées d'une part à un problème d'irrigation, d'autre part à la minimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet.

### 3.1 Introduction

Les algorithmes génétiques, pour la première fois introduits dans [42], reposent sur le principe d'évolution classiquement associé au nom du naturaliste britannique C. Darwin; suite à de nombreuses observations sur la variabilité des espèces, ce dernier émit l'hypothèse que l'évolution d'une espèce est dictée par la nécessité de l'adaptation. Ainsi, seuls les individus les mieux adaptés survivent et se reproduisent. Ce mécanisme a pour conséquence l'augmentation dans la population de la proportion des gènes des individus les plus performants et par là-même la capacité de la population à survivre dans son environnement naturel.

C'est ce principe évolutionniste, jugé aujourd'hui simpliste par la communauté scientifique, qui est à l'origine des algorithmes génétiques souvent utilisés aujourd'hui pour traiter de nombreux problèmes d'optimisation lorsque les méthodes déterministes classiques (telles que les méthodes du gradient, de Newton, etc.) se révèlent inefficaces.

Les algorithmes génétiques possèdent de nombreux avantages par rapport aux méthodes d'optimisation classiques, parmi lesquels;

- le fait d'être des méthodes d'ordre 0 c'est-à-dire ne nécessitant que l'évaluation de

la fonction (et non sa différentiation),

- la capacité à traiter des situations où se présentent un très grand nombre d'extrema locaux,
- la structure modulaire (au même titre que la méthode des éléments finis, par exemple) d'un algorithme génétique permettant d'adapter facilement l'algorithme à d'autres problèmes d'optimisation,
- la possibilité d'une parallélisation très efficace (ceci étant dû à l'absence de hiérarchie dans l'évaluation des critères des individus d'une même population).

Cette approche ne va pas sans contreparties, essentiellement :

- la nécessité de gérer un grand nombre de paramètres,
- l'importance du nombre d'évaluations nécessaires de la fonction coût (ce qui entraîne souvent un temps de calcul important, si par exemple le coût dépend de la solution d'une équation aux dérivées partielles),
- la grande difficulté à obtenir des résultats (voire des vitesses) de convergence.

Décrivons à présent les grandes étapes d'un algorithme génétique; considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{x \in X} F(x)$$

où la fonction  $F$  est une fonction à valeurs réelles et  $X$  l'espace des variables (nous supposons dans ce qui suit qu'un tel maximum existe bien). Dans ce contexte nous appellerons *individu* un élément de  $X$ . Une *population* désignera un ensemble composé d'un nombre fini d'individus. La *performance* d'un individu sera évaluée par le nombre  $F(x)$ . La première étape d'un algorithme génétique consiste à choisir (aléatoirement) une population initiale puis à évaluer la performance de chacun de ses individus. On applique alors un processus de sélection, fonction de la performance des individus. Ainsi, un individu  $x$  sera jugé bien adapté et aura donc plus de chance d'être sélectionné, si sa performance est élevée (i.e. si  $F(x)$  est grand par rapport à la performance des autres individus). Une fois une partie de la population sélectionnée, on applique à cet échantillon un opérateur de *croisement*. Ce dernier crée à partir des différents gènes de l'échantillon une nouvelle population. Les meilleurs individus ayant une plus grande chance de se reproduire par ce procédé, il est probable (mais non certain...) que cette nouvelle population contienne des individus plus performants que la précédente.

Nous ne présenterons pas ici les différents résultats théoriques (pour lesquels nous renvoyons à [42], [18], [25], [77], [82] et [85] pour la modélisation des algorithmes génétiques par chaîne de Markov) assurant le bien-fondé de cette démarche. Nous proposons cependant un début de réponse grâce au théorème des schémas.

## 3.2 Le théorème des schémas

Le théorème des schémas proposé par Holland dans [42] s'énonce dans le cadre des chaînes de bits. Soit  $l$  un entier positif, considérons une population dont les individus sont des chaînes de caractères de longueur  $l$ , composées de 0 et de 1. Introduisons les définitions suivantes.

**Définition 4** *Un schéma  $H$  de longueur  $l$  est une suite de  $l$  caractères  $h_1h_2\dots h_l$  de  $\{0, 1, \#\}$ . Une chaîne de bits  $A = a_1a_2\dots a_l$  sera appelée une instance du schéma  $H$  si*

$$\text{Pour tout } i = 1, \dots, l, (h_i \neq \#) \Rightarrow a_i = h_i.$$

**Définition 5** *L'ordre d'un schéma, noté  $o(H)$ , est le nombre de caractères de  $H$  différents de  $\#$ . La longueur utile  $l(H)$  d'un schéma est définie par la relation*

$$l(H) = j - i \text{ où } h_k = \# \text{ pour } k > j \text{ et } k < i, h_i \neq \#, h_j \neq \#.$$

**Exemple 1** *Le schéma  $H = 11\#\#01\#$  est un schéma qui représente les chaînes de caractères ayant les bits 1, 1, 0, 1 aux positions 1, 2, 5, et 6 respectivement. La longueur utile de  $H$  est 6 et son ordre est 4.*

Nous souhaitons à présent appliquer à une population de chaînes de bits un algorithme génétique et étudier comment un schéma donné survit ou disparaît de la population au fil des générations successives. Un tel résultat sera un indicateur du champ d'investigation de notre algorithme parmi les chaînes de longueur  $l$ . Nous allons donc préciser les différents opérateurs mis en jeu pour faire évoluer notre population. Soit  $F : \{0, 1\}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction bornée que l'on cherche à maximiser.

- **L'opérateur de sélection :** comme nous l'avons décrit en introduction, une chaîne  $A_i$  est sélectionnée proportionnellement à sa performance, c'est-à-dire en fonction de la valeur  $F(A_i)$ . Dans le cas de la recherche d'un maximum, la probabilité de sélectionner l'individu  $A_i$  est donnée par

$$p_i = \frac{F(A_i)}{(\sum_{j=1}^n F(A_j))},$$

où  $n$  représente le nombre d'individus de la population. Par ce procédé de sélection, on constitue un ensemble de  $n/2$  couples parmi lesquels un individu peut apparaître plus d'une fois. Si ce procédé augmente théoriquement la proportion des schémas performants dans cette nouvelle population, il est à noter que cette première étape ne donne en aucun cas lieu à la création de nouveaux schémas dans la population. C'est pour cette raison que l'on introduit un opérateur de croisement.

- **L'opérateur de croisement :** soit  $k$  un entier positif fixé inférieur à  $l$ . On définit le croisement entre deux chaînes de bits (appelés Père et Mère de deux) par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 P = a_1 a_2 \dots a_k | a_{k+1} \dots a_l & & M = b_1 b_2 \dots b_k | b_{k+1} \dots b_l \\
 & \Downarrow & \\
 E_1 = b_1 b_2 \dots b_k | a_{k+1} \dots a_l & & E_2 = a_1 a_2 \dots a_k | b_{k+1} \dots b_l.
 \end{array}$$

Ainsi la concaténation des  $k$  premiers bits de  $P$ , respectivement de  $M$ , avec les  $l - k$  derniers bits de  $M$ , respectivement de  $P$ , donne naissance à deux nouvelles chaînes de caractères, chacune contenant des gènes (i.e. des caractères) provenant de leurs parents. On introduit souvent lors de l'étape de croisement un paramètre supplémentaire noté  $p_c \in ]0, 1[$ , appelé probabilité de croisement. Ce dernier permet de maîtriser la rapidité avec laquelle les gènes d'un individu performant se diffusent dans la population ; précisément, un couple  $(P, M)$  se verra remplacé par ses enfants  $(E_1, E_2)$  suivant une probabilité  $p_c$ . Ainsi si  $p_c = 1$ , on ne ralentit pas le procédé de diffusion : tout couple de parents étant remplacé par ses enfants.

- **L'opérateur de mutation :** cette opération de perturbation est destinée à maintenir la diversité des individus au sein de la population. Chaque individu obtenu après l'étape de croisement est conservé avec une probabilité de  $1 - p_m$  où  $p_m \in ]0, 1[$  est un paramètre fixé de l'algorithme. En cas de mutation, celui-ci est remplacé par un nouvel individu généré aléatoirement.

Nous souhaitons à présent évaluer la probabilité de survie d'un schéma présent dans notre population initiale tout au long de ces opérations. Nous notons pour cela  $\zeta(H, j)$  le nombre d'occurrences de  $H$  dans la population à la  $j$ -ième génération et  $\overline{F}$  (respectivement  $\overline{F}(H)$ ) la performance moyenne de la population à la  $j$ -ième génération (respectivement la performance moyenne des instances de  $H$  à la  $j^{\text{ième}}$  génération). Nous pouvons à présent énoncer :

**Théorème 19 (Théorème des schémas)** *L'espérance du nombre d'occurrences du schéma  $H$  à la  $(j+1)$ -ième génération est minorée par*

$$\zeta(H, j) \frac{\overline{F}(H)}{\overline{F}} \left( 1 - p_c \frac{l(H)}{l-1} - o(H) p_m \right). \quad (3.1)$$

Ainsi, un schéma d'ordre faible et de longueur utile petite, sera reproduit de manière exponentielle dans la population lors de l'exécution d'un algorithme génétique, si sa performance moyenne reste supérieure à celle de la population. On remarquera que cette inégalité ne tient compte que de l'effet destructeur de schémas des opérateurs de croisement et de mutation alors que ces opérateurs donnent lieu à la création de nouveaux schémas.

Ces résultats sont à interpréter dans le contexte général de l'optimisation : une recherche d'un extremum global d'une fonction nécessite une bonne exploration de l'espace des variables ainsi qu'une exploitation efficace des informations apportées par celle-ci (c'est la dichotomie classique des algorithmes d'optimisation globale : identification des cuvettes du critère et recherche d'optimums locaux). Dans le cas d'un algorithme génétique, ces deux opérations sont exécutées simultanément ; durant un procédé d'investigation aléatoire, les schémas performants voient leurs proportions augmentées et par-là même leurs exploitations menées à bien.

Pour conclure cette description du bon fonctionnement des algorithmes génétiques, rappelons un dernier résultat remarquable de Holland (voir [42]). Il est clair qu'une population de  $n$  chaînes de bits de longueur  $l$  contient au moins  $2^l$  et au plus  $2^{nl}$  schémas distincts : Holland a pu démontrer qu'au moins  $n^3$  schémas différents sont explorés efficacement durant l'exécution d'un algorithme génétique.

### 3.3 Minimisation d'une fonction de $\mathbb{R}^N$

#### 3.3.1 Codage et opérateurs

Nous présentons à présent les opérateurs usuels utilisés lors de l'optimisation d'une fonction  $F$  définie sur un pavé  $D_F$  de  $\mathbb{R}^N$ . Nous choisissons dans ce paragraphe de coder un individu par un  $N$ -uplets de réels en virgule flottante (abandonnant ainsi la représentation binaire du paragraphe précédent).

- **L'initialisation :** on génère aléatoirement, suivant une probabilité uniforme, un nombre  $n$  d'éléments de  $D_F$ .
- **Évaluation de la performance :** comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'ajustement des paramètres d'un algorithme génétique doit permettre d'éviter la convergence de la population vers un optimum local. Nous introduisons pour cela le concept de partage (ou notion de *sharing*, voir [18]) qui modifie l'évaluation de la performance d'un individu en fonction de la proximité des autres membres de la population. Pour tout couple  $(x, y)$  d'individus, nous introduisons la quantité

$$\Pi(x, y) = (1 - (\frac{d(x, y)}{\beta})^\alpha)^+$$

où  $d(x, y)$  est une distance de  $\mathbb{R}^N$  et  $\alpha$  et  $\beta$  des paramètres ajustant respectivement le poids du partage et la taille du voisinage. On définit alors dans le cadre d'une recherche de maximum, une nouvelle performance donnée par

$$F'(x) = \frac{F(x)}{\sum_{y \in P} \Pi(x, y)},$$

où  $P$  désigne la population au moment de l'évaluation.

- **La sélection :** nous ferons systématiquement usage de la méthode de sélection par tournois; afin de sélectionner  $n/2$  couples, on tire avec une probabilité uniforme  $n$  fois  $k$  individus ( $k$  étant un paramètre de notre algorithme). L'individu le plus performant parmi les  $k$  est sélectionné.
- **Le croisement :** nous utiliserons un mode de croisement barycentrique; soit  $(x, y)$  un couple d'individus de  $\mathbb{R}^N$  et  $t \in [0, 1]$  un paramètre renouvelé suivant une loi uniforme à chaque croisement. Les enfants du couple  $(x, y)$  sont définis par

$$x_1 = tx + (1 - t)y \text{ et } y_1 = (1 - t)x + ty.$$

D'après la convexité de  $D_F$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont encore des éléments de  $D_F$ . On remarquera qu'un tel procédé ne peut augmenter la norme d'un individu par rapport à celle de ses parents. Pour cette raison et afin d'éviter une convergence prématurée vers 0, nous ferons varier le paramètre  $t$  dans  $[-0.5, 1.5]$ . Si, suite à un tel croisement, un enfant n'appartient plus à  $D_F$ , nous choisissons de le projeter sur la frontière de  $D_F$ .

- **Les mutations :** nous utiliserons uniquement des mutations dites diversifiantes, qui ont pour intérêt d'augmenter l'exploration de l'ensemble  $D_F$  en évitant, comme y contribue le partage, une convergence trop rapide. Ces mutations consistent en une perturbation aléatoire d'une sélection de la nouvelle génération. Il est à noter que la proportion d'individus que l'on perturbe peut évoluer au cours des générations. On peut choisir, par exemple, d'ajuster cette proportion en fonction de la convergence de la population.

### 3.3.2 Application à un problème d'irrigation optimale

#### Introduction et principe de l'algorithme

Nous souhaitons à présent appliquer les méthodes que nous venons de décrire au problème d'optimisation suivant (nous l'étudierons plus en détail au chapitre 3) :

$$\min \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma) dx : \Sigma \subset \bar{\Omega} \text{ connexe, fermé, } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \right\}, \quad (3.2)$$

où  $\bar{\Omega}$  est un convexe borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{H}^1$  la mesure de Hausdorff de dimension 1.

Les difficultés que soulève l'approximation numérique d'une solution du problème (3.2) sont de plusieurs ordres. Il faut avant tout définir un espace de variable adapté;

la contrainte de longueur impose à  $\Sigma$  d'être un compact d'intérieur vide : il est donc naturel de rechercher une approximation de  $\Sigma$  parmi les arbres formés par un nombre fini de points; plus précisément, soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit d'abord notre espace de formes par

$$X = \{(P_1, \dots, P_n) \text{ où } P_i \in \bar{\Omega} \text{ pour } i = 1, \dots, n\}.$$

Bien sûr, un élément de  $X$  ne suffit pas à définir un compact connexe. Nous allons à présent associer de manière arbitraire à tout élément de  $X$  une structure topologique. Nous commençons par relier le couple de points qui sont les plus proches parmi tous les couples de  $X$ . On connecte alors à ce segment le point le plus proche parmi les points restants. On construit ainsi de manière itérative une structure connexe. Plus formellement, soit  $(P_1, \dots, P_n) \in X$ , on définit de proche en proche les  $n$  segments suivants;

$$\begin{aligned} S_1 &= [P_{i_1}, P_{j_1}] \text{ où } d(P_{i_1}, P_{j_1}) = \min \{d(P_i, P_j), i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}, \\ S_2 &= [P_{i_2}, P_{j_2}] \text{ où } d(P_{i_2}, P_{j_2}) = \min \{d(P_i, P_j), i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, j_1\} \text{ et } j \in \{i_1, j_1\}\}, \end{aligned}$$

et pour  $2 < k \leq n$

$$S_k = [P_{i_k}, P_{j_k}],$$

où

$$d(P_{i_k}, P_{j_k}) = \min \{d(P_i, P_j), i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\} \text{ et } j \in \{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k\}\}.$$

On pose alors

$$\Sigma_{(P_1, \dots, P_n)} = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

**Remarque 20** – *Une ambiguïté théorique subsiste; un couple réalisant le minimum de l'une des distances qui apparaissent dans la définition des segments de  $\Sigma_{(P_1, \dots, P_n)}$  peut ne pas être unique. Cette ambiguïté n'existe pas dans un cadre numérique; en effet, chaque point étant codé par un couple de réels en virgule flottante, un tel évènement est en pratique exclu (notons qu'il serait aisé de lever formellement cette ambiguïté en choisissant par exemple le couple  $(P_i, P_j)$  pour lequel  $j$  est minimal).*

- *Conformément au théorème 2 du chapitre 3,  $\Sigma_{(P_1, \dots, P_n)}$  ne peut présenter de boucles :  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_{(P_1, \dots, P_n)}$  possède toujours une seule composante connexe.*

Bien qu'arbitraire, la structure topologique que nous venons d'associer à un  $n$ -uplet de points de  $\mathbb{R}^2$  est relativement naturelle (voir figure 3.1) et permet de considérer des fissures ayant des noeuds de toutes multiplicités. Nous pouvons à présent décrire le déroulement de notre algorithme d'optimisation; l'idée de notre démarche est d'oublier temporairement la structure topologique sous-jacente que nous venons de définir et d'appliquer à un ensemble de  $n$ -uplets le même algorithme que nous avons décrit au paragraphe précédent. Nous n'aurons besoin de revenir à l'arbre associé à chaque  $n$ -uplet que lors de l'évaluation

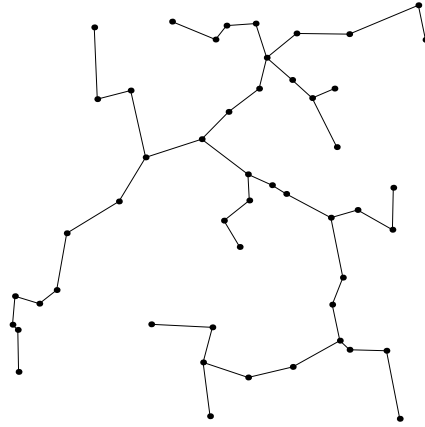


FIG. 3.1: *Structure topologique associée à un ensemble de 50 points*

de notre critère. Ainsi notre schéma numérique peut se résumer de la manière suivante :

- **Initialisation :** tirage aléatoire d'une famille de  $n$ -uplets de  $\Omega$ ,
- **Évaluation de la performance :** pour chaque  $n$ -uplet  $(P_1, \dots, P_n)$ , on reconstruit l'ensemble  $\Sigma_{(P_1, \dots, P_n)}$ . Nous évaluons chaque individu à partir de sa structure topologique (on pourra se reporter au paragraphe suivant pour la prise en compte de la contrainte de longueur et l'évaluation de l'intégrale double),
- **Sélection, croisement et mutations :** nous appliquons les opérateurs déjà décrits dans le cadre de l'optimisation d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^N$ .

On trouvera dans l'annexe C les résultats obtenus par la méthode que nous venons d'exposer. Nous avons appliqué cette démarche au cas du disque, du carré et de la boule unité, et ceci pour différentes contraintes de longueur (voir aussi le chapitre 4). Le lecteur intéressé trouvera un plus grand nombre de détails techniques dans le paragraphe que nous présentons à présent.

### Étude de cas tests : les configurations de Steiner

Minimiser la longueur des réseaux qui connectent un ensemble de points est l'un des plus vieux problèmes d'optimisation mathématique. Au milieu du  $XVII^e$  siècle est apparu le problème élémentaire suivant : minimiser la somme des distances d'un point  $P$  aux



sommets d'un triangle ( $ABC$ ). Cette question fut résolue indépendamment par Fermat, Torricelli et Cavalieri qui établirent qu'un tel minimum est atteint soit par un sommet, soit par un point interne au triangle pour lequel les demi-droites  $(PA)$ ,  $(PB)$ ,  $(PC)$  forment des angles de 120 degrés. Au  $XIX^e$  siècle, Jakob Steiner généralisa ce problème à un ensemble de  $m$  points; à  $m$  points fixés, appelés *sommets*, on cherche à associer un réseau connexe de longueur minimale qui les contient. On montre facilement qu'un tel réseau est constitué uniquement de segments. D'autres points que les  $m$  sommets peuvent apparaître dans un réseau optimal; ils sont appelés *points de Steiner*. Nous retiendrons quatre aspects géométriques d'une structure optimale (voir par exemple [10] et [43] ou [44]) :

- les  $m$  points initiaux sont de degrés 1, 2 ou 3 (i.e. trois branches au plus partent de ces points),
- les points de Steiner sont toujours de degré 3,
- deux segments ayant une même extrémité forment un angle d'au moins 120 degrés,
- elle possède au plus  $m - 2$  points de Steiner.

En 1977, la NP-complétude du problème de Steiner est établie dans [33]. Depuis, un grand nombre d'algorithmes ont été développés permettant d'apporter des solutions exactes ou approchées au problème de Steiner. Notre but ici n'est en aucun cas de concurrencer de tels travaux; nous nous contentons de montrer comment la méthode que nous venons de décrire peut permettre d'approcher une configuration de Steiner optimale.



FIG. 3.2: Réseaux de longueurs respectives 1.561 et 1.5594

Trouver une structure optimale pour  $m$  points du plan revient à identifier les points de Steiner qui en font partie. Le point délicat est ici de déterminer a priori le nombre de ces points. La méthode décrite au paragraphe précédent va nous permettre de contourner cette difficulté. La seule modification à apporter à notre algorithme porte sur la phase d'initialisation; on impose à chaque individu de la population d'avoir  $m + l$  éléments dont les  $m$  premiers sont les  $m$  sommets de notre réseau. On applique alors, étape après étape, le processus décrit précédemment.

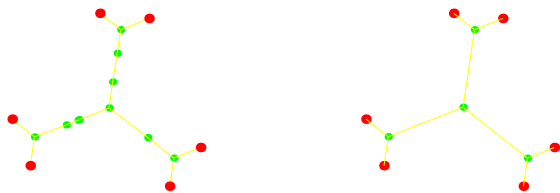


FIG. 3.3: Réseaux de longueurs respectives 1.599 et 1.598

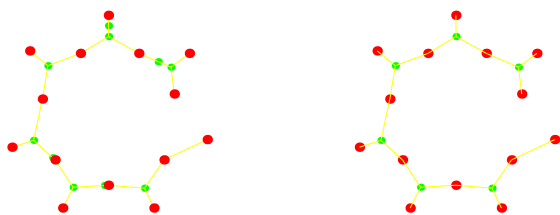


FIG. 3.4: Réseaux de longueurs respectives 2.334 et 2.333

Nous présentons dans les figures 3.2, 3.3 et 3.4 les résultats que nous avons obtenus pour différents ensembles de sommets (points rouges). On trouvera (à gauche) les meilleures configurations identifiées par notre algorithme comparées aux structures optimales (à droite). Ces différentes configurations (ainsi que leurs solutions) ont été choisies parmi les 48 cas tests proposés par W. F. Chow et J. Soukup dans [19]. Les résultats présentés ont été obtenus avec des populations de 300 individus sur 500 générations. Ils sont représentatifs d'un ensemble de 10 simulations indépendantes effectuées pour chacune des configurations. En moyenne, chaque opération de mutation a été appliquée à chaque génération à 5% de la population. Enfin, on trouvera dans les figures 3.5, 3.6 et 3.7 d'autres configurations de Steiner associées à des ensembles de points de  $\mathbb{R}^3$ . Ces exemples montrent en particulier que notre algorithme est très peu sensible au nombre  $l$  de points de Steiner que l'on cherche à obtenir. Autrement dit, comme le résultat théorique rappelé ci-dessus indique que le nombre de points de Steiner est toujours au plus  $m - 2$ , on pourra systématiquement lancer notre algorithme avec  $l = m - 2$ .

**Remarque 21** La valeur de  $l$  constitue un paramètre essentiel de notre algorithme; plus  $l$  est grand, plus le nombre de variables à optimiser (i.e.  $2l$ ) est important. Les résultats numériques que nous présentons dans cette thèse ont été obtenus en testant pour chaque cas considéré différentes valeurs de  $l$ . Il serait également intéressant dans l'avenir de mettre en oeuvre (de manière tout à fait analogue à ce que nous allons présenter dans l'utilisation

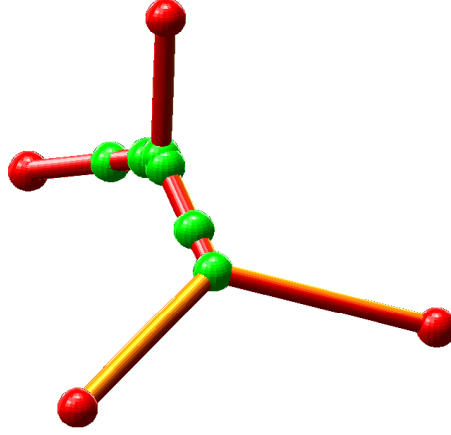


FIG. 3.5: *Arbre de Steiner associé aux sommets d'une pyramide (points rouges)*

des cellules de Voronoi) un algorithme non structuré pour lequel le nombre de sommets  $l$  n'est pas fixé a priori.

### Remarques pratiques et perspectives

Il nous reste à signaler deux aspects techniques occultés jusqu'à présent. Un problème important, que nous avons rencontré lors de l'étude du problème d'irrigation optimale, est l'évaluation de la distance moyenne d'un point de  $\Omega$  à un sous-ensemble  $\Sigma$  donné. Celle-ci est donnée par définition

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma) dx.$$

Nous avons choisi d'approcher cette intégrale par la formule d'approximation élémentaire

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma) dx \sim \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(x_k, P_{\Sigma}(x_k))$$

où la famille des points  $(x_k)_{1 \leq k \leq K}$  est uniformément répartie dans  $\Omega$  et  $P_{\Sigma}$  est un opérateur de projection associé à  $\Sigma$  (notons qu'il n'y a pas unicité du projeté mais bien existence d'un point de  $\Sigma$  réalisant le minimum de  $\inf_{y \in \Sigma} \text{dist}(x_k, y)$ ). Ce minimum est calculé de manière exacte en projetant chaque point  $x_k$  sur les segments de l'arborescence.

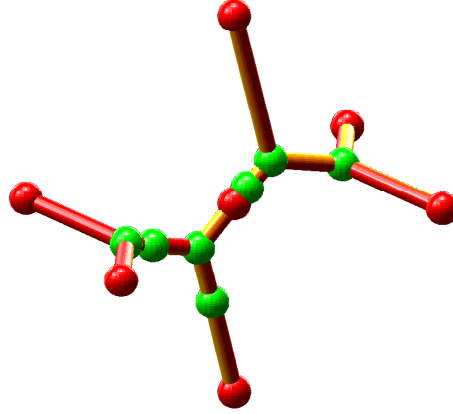


FIG. 3.6: *Arbre de Steiner pour une configuration en étoile (points rouges)*

Le second point que nous n'avons pas encore détaillé est l'application du principe de partage (*sharing*) lors de l'évaluation. Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 3.3, définir un partage revient à se donner une distance sur l'ensemble des compacts connexes  $\Sigma$ . C'est donc très naturellement que nous avons considéré la distance (type distance de Hausdorff) suivante :

$$\begin{aligned} & \text{dist}_H(\Sigma_{(P_1, \dots, P_n)}, \Sigma_{(Q_1, \dots, Q_n)}) \\ = & \max \left\{ \max_{i=1, \dots, n} (\text{dist}(P_i, \Sigma_{(Q_1, \dots, Q_n)})), \max_{i=1, \dots, n} (\text{dist}(Q_i, \Sigma_{(P_1, \dots, P_n)})) \right\}. \end{aligned}$$

Pour conclure ce paragraphe, signalons un exemple (en fait à l'origine de ce travail) d'application de la méthode que nous venons d'exposer (voir [15] pour plus de détails) : on considère deux points  $A$  et  $B$  appartenant à une même membrane  $\Omega$ . On cherche à couper la membrane de  $A$  en  $B$  de manière à fragiliser le moins possible la membrane. Plus rigoureusement, pour  $u_0 \in H^1(\Omega)$ , le problème revient à identifier  $\Sigma^*$  parmi les compacts connexes contenant  $A$  et  $B$  telle que

$$\mathcal{E}(\Sigma^*) = \min \left\{ \int_{\Omega \setminus \Sigma^*} |\nabla u|^2 dx, u \in H_{loc}^1(\Omega \setminus \Sigma^*), u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

soit minimale. La même question se pose si l'on impose à  $\Sigma^*$  de contenir un nombre de points plus grand.

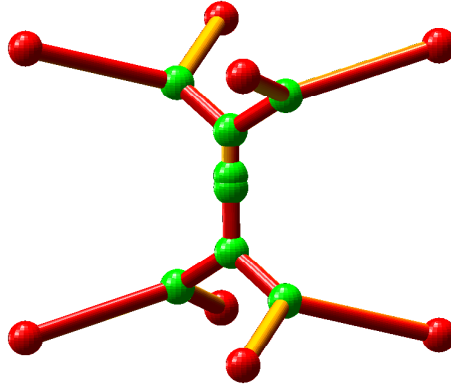


FIG. 3.7: *Arbre de Steiner associé aux sommets d'un cube (points rouges)*

### 3.4 Minimisation d'une fonction de formes

Nous serons amenés dans l'étude numérique des valeurs propres du laplacien-Dirichlet à minimiser des fonctions dont les variables sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , de volume donné.

Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  représentant la zone de dessin de notre problème d'optimisation. Nous considérons une partition de  $D$  en un nombre fini  $m$  de cellules  $(C_i)_{i=1,\dots,m}$  qui en pratique sera fournie par un maillage régulier de l'ouvert  $D$ . Nous définissons l'ensemble des formes admissibles comme toute réunion finie de cellules, soit

$$X = \{\cup_{j \in I} C_j \text{ où } I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, m\})\}$$

où  $\mathcal{P}(\{1, \dots, m\})$  est l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, m\}$ . L'ensemble de formes ainsi considéré a un cardinal fini qui croît exponentiellement avec le nombre de cellules. Nous proposons donc un procédé d'exploration de  $X$  par algorithme génétique.

Le premier paragraphe présente un codage des éléments de  $X$ , analogue à celui des chaînes de bits. Cette approche très naturelle a pour inconvénient majeur de lier le nombre de gènes d'un individu (c'est-à-dire sa complexité) à la taille du maillage. Pour pallier cette difficulté, nous introduisons dans le paragraphe suivant un codage des individus par cellules de Voronoi.

#### 3.4.1 Optimisation par tableaux de bits

Considérons le cas où  $D$  est un carré et la partition en un pavage régulier de  $m^2$  carrés. Un élément  $C \in X$  peut alors se représenter comme une suite  $(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m^2}$  de  $m^2$  bits; si  $C_{i,j} \subset C$ , on attribue la valeur 1 à  $b_{i,j}$  sinon on lui attribue la valeur 0. Nous pouvons alors appliquer les opérateurs décrits au paragraphe 3.2. Malheureusement, l'opérateur de croisement classique ne permet pas une exploration suffisante de l'espace  $X$ . Dans [18], C. Kane propose un autre type de croisement appelé croisement 3 blocs : celui-ci consiste

en un tirage au hasard, à chaque croisement, de deux lignes  $1 \leq n_1, n_2 \leq m$  et deux colonnes  $1 \leq m_1, m_2 \leq m$ . Ces quatre paramètres définissent une partition de  $D$  en neuf carrés distincts. On choisit alors au hasard trois carrés parmi ces neuf; les bits du premier parent correspondant à ces trois blocs sont associés à l'un des enfants qui hérite des bits du complémentaire de ces blocs de son autre parent. Le deuxième enfant est alors obtenu en échangeant les rôles des deux parents. On trouvera dans la figure 3.8 un exemple de tel croisement où le père a tous ses gènes égaux à 1 et la mère a ses gènes égaux à 0.

		Père								
$n_2$		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n_1$		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
		$m_1$			$m_2$					

		Mère								
$n_2$		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n_1$		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$m_1$			$m_2$					

		Fils 1								
$n_2$		0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	0	0	1	1	1	1
		1	1	1	0	0	1	1	1	1
		1	1	1	0	0	1	1	1	1
		1	1	1	0	0	1	1	1	1
$n_1$		0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	1	1	1
		$m_1$			$m_2$					

		Fils 2								
$n_2$		1	1	1	0	0	0	0	0	0
		1	1	1	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	1	1	0	0	0	0
		0	0	0	1	1	0	0	0	0
		0	0	0	1	1	0	0	0	0
		0	0	0	1	1	0	0	0	0
$n_1$		1	1	1	0	0	0	0	0	0
		1	1	1	0	0	0	0	0	0
		$m_1$			$m_2$					

FIG. 3.8: Exemple de croisement 3 blocs

### 3.4.2 Utilisation des cellules de Voronoi

Nous présentons à présent un autre type de codage des éléments de  $X$  utilisant les cellules de Voronoi. Nous introduisons à cette occasion une représentation de type non structuré; cette approche permet à l'algorithme d'adapter la complexité des individus (i.e le nombre de paramètres qui les représentent) au problème d'optimisation traité. Soit  $k$  un entier positif fixé.

- **Le codage des individus :** un individu  $\omega$  de  $X$  sera représenté par  $k$  points de  $\mathbb{R}^2$  notés  $(c_i)_{1 \leq i \leq k}$  et par une chaîne de bits  $(l_i)_{1 \leq i \leq k}$ . Les points  $(c_i)_{1 \leq i \leq k}$  sont appelés

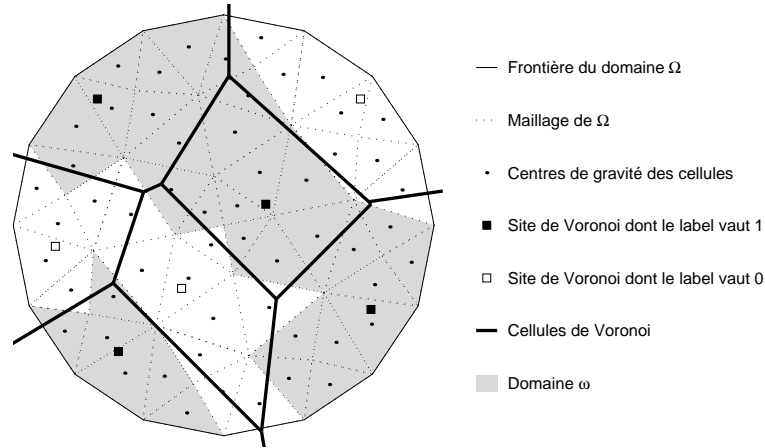


FIG. 3.9: Codage de Voronoi et maillage

sites de Voronoi de labels associés  $l_1, \dots, l_k$ . À chaque site de Voronoi  $c_i$  est associée une cellule de Voronoi définie par

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^2, d(x, c_i) \leq d(x, c_j) \text{ pour } j = 1, \dots, k\}.$$

Par analogie avec la génétique humaine, un mode de représentation est appelé *génotype* de l'individu. La réunion des cellules de Voronoi formant une partition de  $\mathbb{R}^2$ , on lui associe par intersections une partition de la zone de dessin  $D$  appelée *diagramme de Voronoi*. Il nous reste à définir comment au génotype est associé un élément de  $X$  c'est à dire son *phénotype*. On considère pour cela l'ensemble des centres de gravité  $(g_i)_{1 \leq i \leq l}$  de chaque cellule  $C_i$  de notre maillage, on définit alors  $\omega$  élément de  $X$  par

$$\forall i = 1, \dots, l \quad (C_i \subset \omega) \iff (g_i \in V_i \text{ et } l_i = 1).$$

**Remarque 22** Un centre de gravité  $g_i$  pouvant appartenir à plusieurs cellules de Voronoi, une ambiguïté théorique subsiste dans notre définition. Là encore plutôt que d'alourdir la description de notre méthode, nous nous contenterons de remarquer que, du fait du codage de nos points en virgule flottante, une telle situation n'arrive pas en pratique.

Remarquons qu'il n'est en aucun cas nécessaire de calculer tout le diagramme de Voronoi : il est suffisant de calculer pour chaque cellule du maillage le site de Voronoi dont elle est le plus proche. Nous observons de plus qu'un tel mode de représentation est indépendant du pas du maillage considéré. La figure 3.9 présente pour un domaine  $D$  obtenu par maillage triangulaire d'un disque un exemple de domaine  $\omega$

codé par 7 sites de Voronoi.

- **Initialisation :** on génère aléatoirement pour chaque individu  $k$  sites de Voronoi et une chaîne de bits qui leur est associée.
- **Évaluation de la performance :** comme nous l'avons annoncé, nous souhaitons traiter un problème d'optimisation sous contrainte de volume. De manière analogue, au paragraphe 3.3.2, nous traiterons cette contrainte par une méthode de pénalisation adaptative.

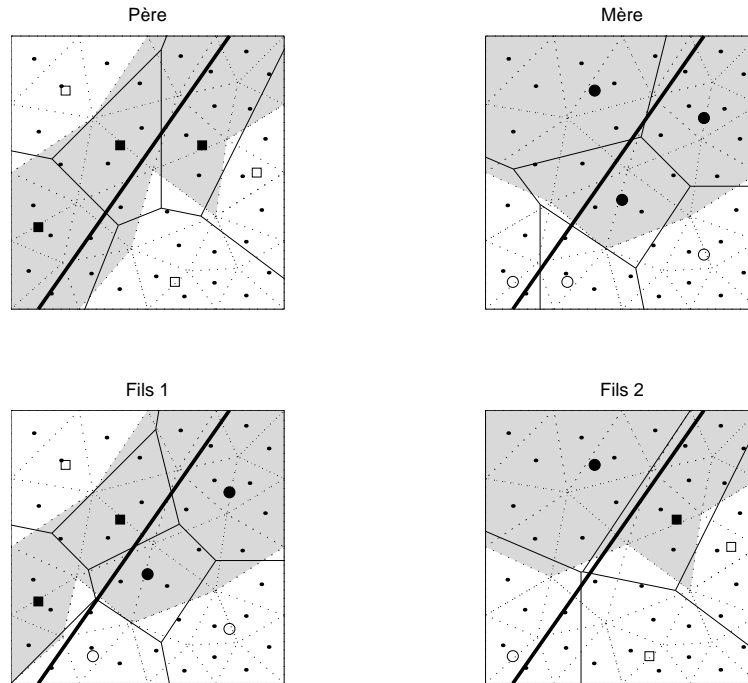


FIG. 3.10: *Croisement par droite de partage*

- **Le croisement :** l'intérêt du croisement que nous allons décrire est de permettre une variation du nombre de sites de Voronoi de chaque individu. La première étape consiste à tirer aléatoirement une droite qui coupe la zone de dessin en deux. Les sites de Voronoi du père, respectivement de la mère, sont ainsi séparés en deux sous-ensembles notés  $P_1$ ,  $P_2$ , respectivement  $M_1$  et  $M_2$ . Le premier fils hérite alors des sites  $P_1 \cup M_1$ , le second des sites  $P_2 \cup M_2$  ainsi que de leurs labels. La figure 3.10 représente un tel croisement où les sites du père (ou hérités du père) sont représentés



par des carrés et ceux de la mère (ou hérités de la mère) par des disques. Si un enfant obtient par ce procédé un nombre de sites supérieur à  $k$ , on choisit au hasard parmi ceux-ci un ensemble de  $k$  points. Si un enfant ne possède aucun site, il hérite des sites de l'un de ses parents.

- **Les mutations :** nous utiliserons pour ralentir la convergence de notre population quatre types de mutations diversifiantes : la suppression ou l'ajout d'un site de Voronoi dans le génotype d'un individu, le changement de label d'un site et enfin la perturbation aléatoire des coordonnées d'un site de Voronoi.

### 3.4.3 Minimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet

#### Approche par homogénéisation

Soit  $D$  une zone de dessin triangulée et  $k$  un entier positif au moins égal à 1. Comme nous le verrons plus en détail au chapitre suivant, minimiser  $\lambda_k(\Omega)$  parmi les ouverts  $\Omega$  ayant une aire égale à 1 revient, numériquement, à minimiser  $\lambda_k(\mu)$  parmi les densités de mesures de volume 1 prenant les valeurs 0 ou  $M$  (où  $M \gg 1$ ). Nous avons donc appliqué l'algorithme stochastique que nous venons de présenter à la détermination du support d'une mesure optimale. Autrement dit, nous avons cherché à identifier le support de la mesure  $\mu^*$  solution du problème

$$\lambda_k(\mu^*) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_d(D), |\mu| \leq 1} \lambda_k(\mu)$$

où

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu^* u = \lambda_k(\mu^*) u \text{ dans } D, \\ u = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases}.$$

et

$$\mathcal{M}_d(D) = \{\text{densités } \mu \text{ valant } 0 \text{ ou } M \text{ sur chaque cellule de la triangulation}\}.$$

#### Résultats numériques

Les figures qui suivent représentent les résultats de la minimisation des dix premières valeurs propres du laplacien sous contrainte de volume. La recherche de valeurs propres étant une opération lourde numériquement, il a été nécessaire pour atteindre des temps d'exécution raisonnables (i.e. 24 heures sur une machine SUN 4500 et 4 processeurs de 900MHz) de paralléliser notre algorithme. Chacun des résultats présentés a été obtenu après 8 expérimentations indépendantes au moins. Les paramètres que nous avons utilisés sont les suivants :

- une population de 800 individus,

- un nombre maximal de sites de Voronoi égal à 60,
- des densités prenant les valeurs 0 ou  $M = 1500$ ,
- un maillage de dimensions  $40 \times 40$ .

On remarquera, pour finir, la nécessité d'ajouter à ce prétraitement un algorithme d'optimisation topologique. En effet, l'étude par cellules de Voronoi que nous avons menée à bien n'a pas permis, par exemple, d'identifier le nombre de composantes connexes de l'ouvert optimal associé à  $\lambda_2$  (bien que l'on puisse le suspecter). Cette dernière étape fait l'objet du chapitre qui suit.

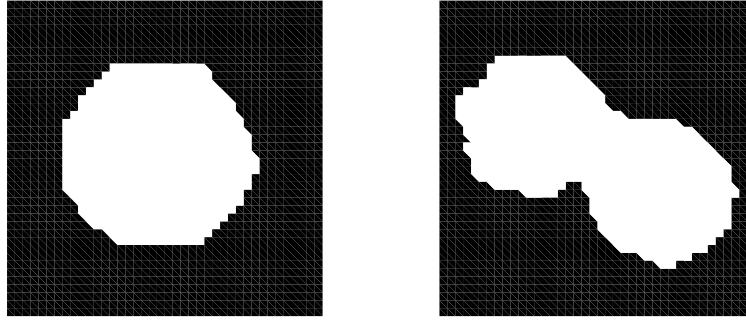


FIG. 3.11: *Formes obtenues par AG associées aux valeurs propres 1 et 2*

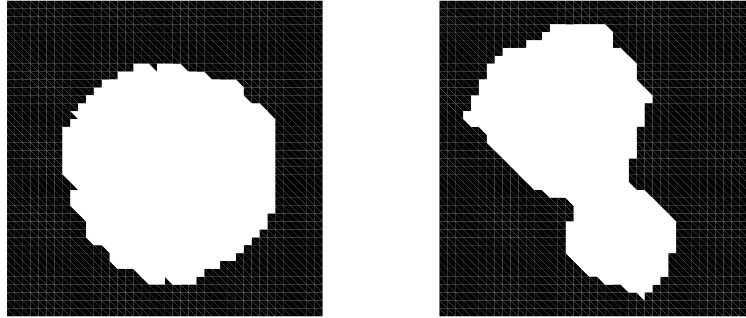


FIG. 3.12: *Formes obtenues par AG associées aux valeurs propres 3 et 4*

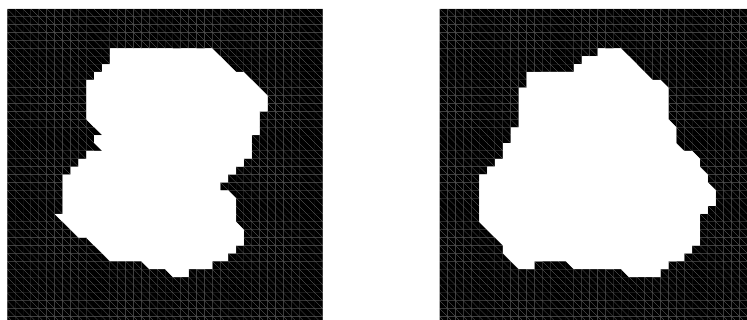


FIG. 3.13: *Formes obtenues par AG associées aux valeurs propres 5 et 6*

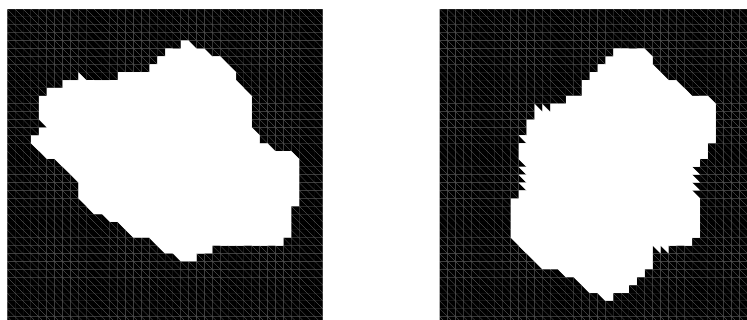


FIG. 3.14: *Formes obtenues par AG associées aux valeurs propres 7 et 8*

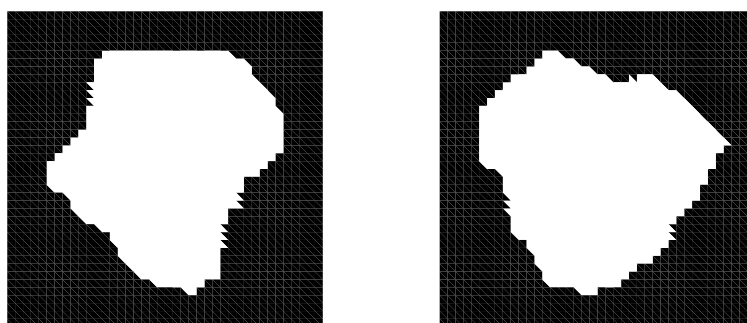


FIG. 3.15: *Formes obtenues par AG associées aux valeurs propres 9 et 10*



## Chapitre 4

# Minimisation des valeurs propres du laplacien-Dirichlet par une méthode mixte relaxation/lignes de niveaux

Dans ce chapitre nous souhaitons exposer une nouvelle approche numérique en optimisation de formes que nous avons mise en oeuvre afin de minimiser les valeurs propres du laplacien-Dirichlet sous contrainte de volume. Comme nous l'avons rappelé précédemment, la première difficulté rencontrée fut le problème des optimum locaux. L'optimisation stochastique développée au chapitre précédent nous a permis d'obtenir de bons candidats à l'optimalité. Nous souhaitons à présent appliquer à ces formes initiales un algorithme déterministe permettant de minimiser localement les valeurs propres.

La méthode que nous allons présenter ici combine deux approches qui ont vu le jour au cours des vingt dernières années : l'homogénéisation et la méthode des lignes de niveaux. Nous commençons ce chapitre par une description des trois méthodes principales d'approximation en optimisation des formes : l'optimisation frontière, l'homogénéisation et enfin la méthode des lignes de niveaux. Nous nous efforcerons pour chacune d'elles de décrire les difficultés posées par leur mise en oeuvre pour traiter la minimisation de valeurs propres. Nous serons alors naturellement amené à envisager une nouvelle démarche combinant ces différentes techniques. Pour conclure, nous présenterons les résultats numériques que nous avons pu obtenir. Outre le fait que nous améliorons les valeurs présentées dans [84], nous proposons une description géométrique des ouverts candidats à être optimaux pour  $\lambda_k$ ,  $k \leq 10$ .

## 4.1 L'optimisation frontière, dérivation par rapport au domaine

L'optimisation par variation de frontière est la première méthode que nous avons mise en oeuvre dans notre étude des valeurs propres. Celle-ci nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants dans la recherche d'une forme convexe optimale minimisant  $\lambda_2$ . Bien qu'insuffisante pour aborder directement la minimisation des valeurs propres sous seule contrainte de volume, cette approche présente le grand avantage, par rapport à la méthode que nous allons développer, de ne pas modifier la fonction coût. Ainsi, c'est en appliquant une méthode de variation frontière aux formes obtenues par notre approche mixte que nous avons pu obtenir les valeurs présentées dans le tableau récapitulatif 4.5, section 4.3.6.

### 4.1.1 Présentation générale

Un grand nombre de méthodes d'optimisation sont basées sur l'exploitation de ce que l'on appelle des conditions d'optimalité du premier ordre (dont les méthodes de descente classique du type gradient ou quasi-Newton). Celles-ci s'obtiennent dans le cadre de la dimension finie en recherchant les zéros du gradient de la fonction dont on cherche un extremum. Le problème qui se pose en optimisation des formes est l'absence de structure vectorielle naturelle sur les formes autorisant à définir la notion de dérivée. Pour contourner cette difficulté, nous définissons pour tout champ de vecteur lisse  $V$  (appelé *champ de déformation*) de  $\mathbb{R}^N$ , la dérivée (si elle existe) de la fonctionnelle  $J$  en  $\Omega$  dans la direction du champ de vecteur  $V$  par

$$d(J(\Omega))(\Omega, V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega_0)}{t},$$

où l'on a noté

$$\Omega_t = \{(Id + tV)(x), x \in \mathbb{R}^N\}.$$

Une fonctionnelle  $J$  dérivable en ce sens et qui admet un extremum en  $\Omega$ , vérifie la relation

$$d(J(\Omega))(\Omega, V) = 0 \tag{4.1}$$

pour tout champ de déformation  $V$ .

**Remarque 23** *Sous réserve d'hypothèses de régularité, on peut montrer le théorème de structure suivant :*

$$\exists h_\Omega \in \mathcal{D}'(\partial\Omega) \text{ telle que } \forall V \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), d(J(\Omega))(\Omega, V) = \langle h_\Omega, V.n \rangle_{\mathcal{D}'(\partial\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}.$$

*Ce résultat traduit le fait que la dérivation ne tient compte que de la composante normale du champ de déformation.*

Nous décrivons maintenant comment se traduit la relation (4.1) dans le cadre de l'étude de problèmes de valeurs propres. Plus précisément, énonçons le théorème suivant dû à Hadamard :

**Théorème 24** *Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^2$  et  $\lambda_k(\Omega)$  la  $k$ -ième valeur propre du laplacien avec condition au bord de Dirichlet. On suppose que  $\lambda_k(\Omega)$  est une valeur propre simple. La fonction réelle  $t \mapsto \lambda_k(\Omega_t)$  est alors dérivable en  $t = 0$ , de dérivée*

$$d(\lambda_k(\Omega))(\Omega, V) = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V.n d\sigma \quad (4.2)$$

où  $u_k$  est la  $k$ -ième fonction propre associée à  $\lambda_k(\Omega)$ , normalisée par  $\int_{\Omega} u_k^2(x) dx = 1$ .

On en trouvera une preuve dans [41] par exemple. Nous nous contentons ici de donner une justification formelle de la relation (4.2). Soient  $u_k(t, x)$  et  $\lambda_k(\Omega_t)$  les  $k^{\text{ième}}$  fonction propre et valeur propre associée à l'ouvert  $\Omega_t$ . Supposons les dérivables par rapport au paramètre  $t$ ; en dérivant formellement en  $t = 0$  la relation

$$-\Delta u_k(t, x) = \lambda_k(\Omega_t) u_k(t, x), \quad (4.3)$$

nous obtenons

$$-\Delta u'_k = \lambda_k(\Omega) u'_k + \lambda'_k(\Omega) u_k \text{ dans } \Omega. \quad (4.4)$$

La relation au bord

$$u_k(t, (Id + tV)(x)) = 0$$

pour tout  $x \in \Omega$  devient

$$u'_k + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{d(Id + tV)_i}{dt} = u'_k + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_k}{\partial x_i} V_i = 0.$$

Soit

$$u'_k = - \frac{\partial u_k}{\partial n} V.n \quad (4.5)$$

$\nabla u_k = \frac{\partial u_k}{\partial n}.n$ ,  $u_k$  étant nulle sur le bord. En multipliant (4.4) par  $u_k$  et en intégrant sur  $\Omega$  nous obtenons

$$- \int_{\Omega} u_k \Delta u'_k dx = \lambda_k(\Omega) \int_{\Omega} u_k u'_k dx + \lambda'_k(\Omega).$$

D'où, par la formule de Green,

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u'_k}{\partial n} u_k d\sigma + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial n} u'_k d\sigma - \int_{\Omega} u'_k \Delta u_k dx = \lambda_k(\Omega) \int_{\Omega} u_k u'_k dx + \lambda'_k(\Omega). \quad (4.6)$$

De plus en multipliant (4.3) en  $t = 0$  par  $u'_k$  et en intégrant à nouveau sur  $\Omega$ , nous avons la nouvelle relation

$$- \int_{\Omega} u'_k \Delta u_k dx = \lambda_k(\Omega) \int_{\Omega} u_k u'_k dx. \quad (4.7)$$

Des identités (4.5), (4.6), (4.7), nous déduisons

$$d(J(\Omega))(\Omega, V) = \lambda'_k(\Omega) = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot n d\sigma.$$

**Remarque 25** Comme nous l'avons signalé au chapitre 1, on peut s'affranchir de la contrainte de volume en observant que

$$\min_{|\Omega|=1, \Omega \text{ ouvert}} \lambda_k(\Omega) = \min_{\Omega \text{ ouvert}} |\Omega| \lambda_k(\Omega).$$

Pour calculer la dérivée de  $|\Omega| \lambda_k(\Omega)$ , nous sommes ainsi amenés à calculer la dérivée du volume par rapport à une variation de frontière. Un tel résultat s'obtient facilement (voir par exemple [41]) en se ramenant à un domaine fixe par la formule de Green. On obtient alors

$$d(|\Omega|)(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} V \cdot n d\sigma. \quad (4.8)$$

Grâce à cette notion de dérivée, nous sommes en mesure de décrire les différentes étapes d'un algorithme d'optimisation frontière pour la minimisation de la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre sous contrainte de volume :

- **Discrétisation de la frontière** Une forme initiale  $\Omega_0$  étant donnée, on choisit  $n$  points de contrôle sur  $\partial\Omega_0$  que nous noterons  $P_i$   $i = 1, \dots, n$ .
- **Calcul de la dérivée de forme** Soit  $n(P_i)$  le vecteur normal extérieur au point  $P_i$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on calcule par discrétisation de (4.2) et (4.8) la valeur de la dérivée  $d_i$  de la fonction d'une variable réelle

$$t \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t^i) - J(\Omega_0)}{t}$$

où l'on a noté

$$\begin{cases} J(\Omega) = |\Omega| \lambda_k(\Omega), \\ \Omega_t^i = \{(Id + tV_i)(x), x \in \mathbb{R}^N\}, \end{cases}$$

pour  $V_i = v_i(x)n(x)$  où  $v_i$  est une fonction lisse à valeurs réelles valant 1 en  $P_i$  et 0 en les autres points de contrôle. On adopte pour cela l'approche utilisée par exemple dans [67] pour le problème du fromage électromagnétique. Nous ne la rappellerons pas ici.

- **Critère de sortie** par l'évaluation de la norme du vecteur  $(d_i)_{i=1, \dots, n}$ , on estime la distance qui sépare notre forme d'une forme stationnaire. Si cette norme est jugée petite, on stoppe l'algorithme.



- **Variation de frontière** chaque sommet est déplacé le long de la normale (ou plus exactement de la bissectrice des deux segments adjacents) suivant la valeur opposée de la dérivée  $d_i$  (algorithme de gradient). Précisément,  $P_i$  est translaté d'un vecteur  $\alpha d_i n(P_i)$  où  $\alpha > 0$  est le pas de descente (choisi de façon adaptative). On peut aussi, dans ce contexte, utiliser une méthode de Quasi-Newton cf. [67].
- **Évaluation du critère** après s'être assuré que, suite au déplacement, la suite  $(P_i)_{i=1,\dots,n}$  définit toujours un polygone non croisé, on évalue la valeur du critère pour la nouvelle forme. On ajuste alors le pas de descente  $\alpha$ , exactement de la même manière que pour un algorithme de gradient en dimension finie. Une itération se termine par un retour à l'étape du calcul de la dérivée.

La méthode que nous venons de décrire dans le cadre des problèmes de valeurs propres a été appliquée à de nombreuses autres situations. Elle présente cependant trois inconvénients majeurs qui sont

- l'absence de changement de topologie,
- le grand risque de s'arrêter à un minimum local,
- l'important coût de calcul que constitue le remaillage de la forme à chaque itération.

Ce procédé s'est toutefois révélé efficace dans l'étude de la seconde valeur propre sous contrainte de convexité et de volume.

#### 4.1.2 Application au problème du Stade

Nous revenons dans ce paragraphe au problème étudié dans le chapitre 1. Nous avons pu démontrer que le problème d'optimisation de forme

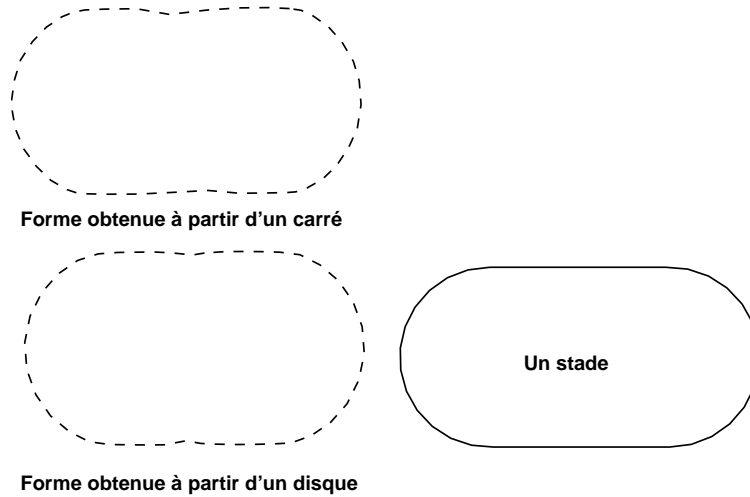
$$\min_{\Omega \text{ convexe}, |\Omega|=1} \lambda_2(\Omega) = \min_{\Omega \text{ convexe}} \lambda_2(\Omega) |\Omega|$$

est un problème bien posé et que le stade ne réalise pas ce minimum. Nous avons établi que l'ouvert optimal possède exactement deux parties plates parallèles sur son bord.

Nous souhaitons apporter ici une description numérique de la forme optimale à l'aide d'une méthode de variation frontière. La seule difficulté que nous n'avons pas encore abordée est la prise en compte de la contrainte de convexité. On utilise pour cela un terme de pénalisation; on applique ainsi l'algorithme de variation frontière à la fonction pénalisée

$$\overline{J}(\Omega) : = \lambda_2(\Omega) |\Omega| + p(|Co(\Omega)| - |\Omega|)^2$$

où  $Co(\Omega)$  est l'enveloppe convexe de  $\Omega$  et  $p$  un facteur de pénalisation. Nous présentons dans les figures 4.1 et 4.2 les résultats obtenus à partir de deux formes initiales distinctes.

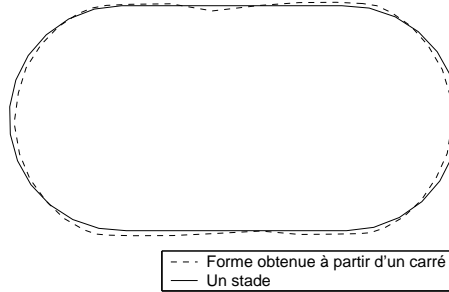
FIG. 4.1: *Optimisation à partir de différentes formes initiales*

On remarquera la très grande proximité du stade et de notre forme optimale aussi bien du point de vue géométrique qu'en terme de valeur propre (voir le tableau ci-après).

Domaine	Valeur exacte	Valeur numérique
Carr	$5\pi^2$	49.348
Boule	$j_1^2\pi$	46.124
Meilleur rectangle	$4\pi^2$	39.478
Meilleure ellipse		39.317
Le stade		38.001
Meilleur domaine convexe		37.980
Deux boules	$2j_0^2\pi$	36.336

**Remarque 26** *Le léger défaut de convexité que l'on peut observer dans les formes présentées dans la figure 4.1 s'explique par le fait qu'il nous a paru artificiel d'utiliser un facteur de pénalisation trop important. Ce dernier, qui conditionne la convexité, est en effet lié à l'incertitude du calcul approché de  $\lambda_2(\Omega)|\Omega|$ .*

Pour conclure cette description, signalons que nous avons essayé de substituer à la pénalisation une approche de type projection; nous remplaçons à chaque itération le nouvel ouvert obtenu par son enveloppe convexe. Cette démarche s'est finalement révélée

FIG. 4.2: *Comparaison par superposition*

peu efficace. Ceci peut s'expliquer en observant que tout ouvert possédant une partie plate peut être un point stationnaire pour cet algorithme.

## 4.2 La méthode de relaxation

### 4.2.1 Introduction

Nous allons à présent exposer une méthode de relaxation par homogénéisation qui connaît d'important succès ces dernières années aussi bien dans l'obtention de résultats d'existence en optimisation de formes qu'à travers le développement de méthodes numériques.

De nombreux problèmes d'optimisation de forme ne possèdent pas de solution dans l'espace naturel de recherche (typiquement l'ensemble des ouverts de la zone de dessin). On est alors amené pour démontrer l'existence d'une forme optimale, de manière analogue à l'introduction de solutions faibles en théorie des équations aux dérivées partielles, à agrandir l'espace des variables. Cette démarche fut notamment appliquée en mécanique des structures (voir par exemple [1], [8], [9]), où le domaine cherché est obtenu à partir de la solution homogénéisée par un procédé de filtrage.

### 4.2.2 Relaxation pour les problèmes de valeurs propres

Soit  $D$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  et  $\Omega$  un élément de  $X$ , l'ensemble des ouverts de  $D$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $u_\Omega \in H_0^1(\Omega)$ , la  $k^{\text{ième}}$  fonction propre du laplacien. Formellement  $u_\Omega$  vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = \lambda_k(\Omega) u_\Omega & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous nous intéressons au problème d'optimisation

$$\inf_{\Omega \in X, |\Omega| \leq 1} \lambda_k(\Omega). \quad (4.9)$$

Mis à part pour  $k = 1$  ou  $2$ , on ne sait pas à ce jour si un tel problème admet une solution. Un résultat important dans cette direction fut obtenu par Buttazzo et Dal Maso qui démontrèrent l'existence d'une forme optimale pour le problème (4.9) parmi l'ensemble des quasi ouverts. Nous souhaitons introduire ici un autre type de relaxation plus adapté à l'approximation numérique; pour toute mesure de Borel positive sur  $D$  notée  $\mu$ , on considère le nouveau problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = \lambda(\mu)u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

Par analogie avec la formulation faible classique, nous dirons que le couple  $(\lambda, u)$  est solution de (4.10) si

$$\begin{cases} \forall v \in V_\mu^0, \int_D \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_D u(x) v(x) d\mu = \lambda(\mu) \int_D u(x) v(x) dx \\ \text{avec } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } u \in V_\mu^0, \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $V_\mu^0 = H_0^1(D) \cap L_\mu^2(D)$ ;  $L_\mu^2(D)$  désignant l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable pour la mesure  $\mu$ . On montre facilement que pour tout  $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$  (l'ensemble des mesures de Borel positives sur  $D$ ), il existe une suite dénombrable de vecteurs propres et valeurs propres (positives) solutions de (4.11). Détaillons à présent comment associer à tout ouvert de  $X$  un élément de  $\mathcal{M}_0(D)$ . On considère pour cela la mesure capacitaire relative à  $D$  définie pour tout  $E \in \mathcal{P}(D)$  par

$$cap_D(E) = \inf \left\{ \int_D |\nabla u|^2(x) dx : u \in C_0^\infty(D), u \geq 1 \text{ dans un voisinage ouvert de } E \right\}. \quad (4.12)$$

Pour tout  $\Omega \in X$ , on introduit  $\mu_\Omega \in \mathcal{M}_0(D)$  où

$$\mu_\Omega(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } cap_D(B \setminus \Omega) = 0, \\ +\infty & \text{si } cap_D(B \setminus \Omega) > 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

pour tout borélien  $B$  de  $D$ . On construit ainsi une injection naturelle de  $X$  dans  $\mathcal{M}_0(D)$ . Il reste à définir dans l'espace de mesure  $\mathcal{M}_0(D)$  une notion de volume qui généralise notre contrainte, c'est pourquoi on pose pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$

$$|\mu| = |\{x \in D, w_\mu(x) > 0\}| \quad (4.14)$$

où  $w_\mu$  est la solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta w_\mu + \mu w_\mu = 1 & \text{dans } D, \\ w_\mu \in H_0^1(D). \end{cases}$$

**Remarque 27** On retrouve bien  $|\mu_\Omega| = |\Omega|$  à l'aide du principe du maximum et de la définition (4.13). En effet la fonction  $w_{\mu_\Omega}$  est formellement nulle à l'extérieur de  $\Omega$  et sous-harmonique à l'intérieur.

On peut alors montrer le théorème de structure suivant (voir par exemple [41]) :

**Théorème 28 (Dal Maso-Mosco)** L'ensemble  $\{\mu \in \mathcal{M}_0(D), |\mu| \leq 1\}$  est le complété de l'ensemble des ouverts de  $D$  de volume au plus 1 pour la  $\gamma$ -convergence. De plus,  $\mathcal{M}_0(D)$  est compact pour la  $\gamma$ -convergence.

Après s'être assuré de la continuité de notre problème de valeur propre pour la  $\gamma$ -convergence, on montre à l'aide de ce résultat que le problème d'optimisation

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}_0(D), |\mu| \leq 1} \lambda_k(\mu) \quad (4.15)$$

possède bien une solution.

### 4.2.3 Approximation numérique

Nous allons montrer dans ce paragraphe, comment la formulation relaxée (4.10) se prête bien à la recherche numérique d'une forme optimale. Nous verrons que cette méthode présente cependant une difficulté pratique importante : dans un tel contexte, le volume associé à une mesure est non différentiable par rapport aux variations de celle-ci. Une première application de cette méthode à la minimisation de valeurs propres a été proposée dans [32]. L'auteur se propose de contourner la difficulté de la non différentiabilité du volume par un procédé de régularisation. Malheureusement, une telle méthode nécessite d'introduire dans l'algorithme un certain nombre de paramètres dont l'ajustement nous a semblé délicat. C'est pour cette raison que nous n'avons pas appliqué cette démarche directement, lui préférent une méthode mixte que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

Soit  $(T_h)_{h=1,\dots,l}$  une triangulation de la zone de dessin. Nous souhaitons approcher la mesure optimale du problème (4.15) par une suite de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue dont les densités sont constantes sur chaque triangle  $T_h$ . À la fin de l'algorithme, on espère retrouver une mesure du type (4.12), c'est à dire une mesure valant 0 ou "l'infini" sur chaque triangle du maillage.

On notera  $(m_h)_{h=1,\dots,l} \in \mathbb{R}_+^l$  la mesure dont la densité est donnée par

$$\sum_{h=1}^l m_h \chi_{T_h}$$

où  $\chi_{T_h}$  est la fonction caractéristique du triangle  $T_h$ . On trouvera dans [32] le résultat suivant :

**Proposition 20** Soit  $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ , de densité  $(m_h)_{h=1,\dots,l}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\lambda_k(\mu)$ , la  $k^{\text{ième}}$  valeur propre de l'opérateur  $-\Delta + \mu I$ , est valeur propre simple et soit  $u_k$  le vecteur

propre associé. On a alors

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial m_h} = \int_{T_h} (u_k)^2(x) dx$$

Une fois cette dérivée calculée, l'idée est d'appliquer un algorithme classique du type gradient au  $l$ -uplet  $(m_h)_{h=1,\dots,l}$  (exactement de la même manière que nous avons optimisé les coordonnées des points de contrôle dans le paragraphe consacré à l'optimisation frontière). Comme nous l'avons signalé précédemment, on peut montrer que le volume de  $\mu$  (au sens de (4.14)) n'est pas différentiable par rapport à  $m_h$ . Cette difficulté disparaît lorsque l'on considère, grâce à la méthode des lignes de niveaux, des variations continues des ensembles nodaux de la densité  $\mu$  :

### 4.3 La méthode des lignes de niveaux appliquée au problème relaxé

#### 4.3.1 Introduction

La méthode que nous allons exposer est une adaptation d'un travail de Osher et Santosa portant sur un problème de valeurs propres non dégénérées (voir [63]). Une méthode d'optimisation par ligne de niveaux présente plusieurs avantages ; en particulier, elle n'impose aucune restriction topologique a priori et permet de travailler sur un maillage fixe. Avant d'en détailler les étapes, rappelons le principe d'une optimisation par ligne de niveaux.

Soit  $\Omega \subset D$  une forme initiale donnée. La première étape consiste à paramétrer la forme  $\Omega$  par une fonction  $\Phi$  appelée *fonction lignes de niveaux*, qui doit vérifier

$$\begin{cases} \Phi(x) > 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \Phi(x) < 0 & \text{si } x \in D \setminus \overline{\Omega}, \\ \Phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la suite de ce chapitre, comme il est suggéré dans [64], on initialisera une telle fonction à l'aide de la distance signée; il s'agit de la fonction définie par

$$\begin{cases} \Phi(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega, \\ \Phi(x) = -\text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in D \setminus \Omega. \end{cases}$$

Remarquons que la construction de la distance signée n'est a priori pas triviale en général et nécessite souvent une attention particulière (voir [78]). Dans les situations qui nous intéressent, la frontière des ouverts initiaux est obtenue à partir des formes générées par l'algorithme génétique du chapitre précédent. Ces dernières étant par définition un ensemble de cellules du maillage, nous avons pris comme approximation de la fonction distance signée, la distance aux centres de gravité des triangles frontières.

La fonction  $\Phi$  étant définie, on fait évoluer sa ligne de niveau 0 (i.e.  $\partial\Omega$ ) au cours du temps en la soumettant à un champ de vitesse normal  $vn$  (où  $v$  est une fonction à valeurs

réelles). Autrement dit, si  $x(t)$  décrit l'évolution d'un point de  $\partial\Omega$  au cours d'une telle transformation, on veut que

$$\Phi(t, x(t)) = 0 \text{ pour tout } t.$$

En dérivant cette dernière expression, nous obtenons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{dx}{dt}(t) \nabla_x \Phi(t, x(t)) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, x(t)) + v(x(t))n(x(t)) \cdot \nabla_x \Phi(t, x(t)) = 0. \quad (4.16)$$

La normale à une ligne de niveau en un point non stationnaire étant donnée par

$$n = \frac{\nabla_x \Phi}{|\nabla_x \Phi|}(t, x(t)),$$

on a, d'après (4.16),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, x(t)) + v(x(t)) |\nabla_x \Phi|(t, x(t)) = 0. \quad (4.17)$$

Pour calculer l'évolution de  $\Phi$ , nous devons donc résoudre une équation de type Hamilton-Jacobi. On notera que le calcul que nous venons de présenter ne concernait à priori que la ligne de niveau 0. Si le champ de vecteur  $vn$  possède une extension naturelle (comme dans le cas qui nous intéresse), on résout l'équation (4.17) dans toute la zone de dessin  $D$ .

Une difficulté importante que nous n'avons pas encore mentionnée, et qui sera l'objet du paragraphe suivant, est le calcul d'un bon champ de vitesse  $vn$  pour le problème d'optimisation étudié. On trouvera à ce sujet dans [2], une approche très naturelle consistant à choisir comme champ de vitesse le champ obtenu par dérivation frontière.

Avant d'entrer dans les détails, résumons les différentes étapes d'une optimisation par lignes de niveaux :

1. initialisation de  $\Phi$  par la fonction distance signée,
2. calcul du champ de vitesse, vérification du critère de sortie de la boucle,
3. propagation de la ligne de niveau en résolvant l'équation d'Hamilton-Jacobi associée,
4. évaluation du critère,
5. redéfinition de  $\Phi$  ou diminution du pas de temps,
6. éventuelle réinitialisation de  $\Phi$  par la fonction distance signée et retour à l'étape 2.

### 4.3.2 Calcul de la dérivée

Nous présentons ici le résultat du calcul de la variation de la valeur propre par rapport à une variation normale de  $\Phi$ . Cette fois encore, nous nous contentons de donner une justification formelle de la dérivation. Nous renvoyons par exemple à [41] ou [80] pour plus de justifications.

Soit  $\mu$  une densité sur  $D$ , ne prenant que les valeurs 0 ou  $M$ . On observera que pour  $M$  grand, la valeur de  $\lambda_k(\mu)$  est numériquement proche de celle de  $\lambda_k(\Omega)$  où  $\Omega = \{x \in D : \mu(x) = 0\}$ . Nous souhaitons estimer la dérivée de  $\lambda_k(\mu)$  par rapport à une variation de sa ligne de niveau soumise à un champ de vitesse normal  $vn$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $u_\mu$ , la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\mu + \mu u_\mu = \lambda_k(\mu) u_\mu & \text{dans } D, \\ u_\mu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.18)$$

au sens du paragraphe précédent. Soit  $u_{\mu,t}$  la fonction propre vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u_{\mu,t} + \mu_t u_{\mu,t} = \lambda_k(\mu_t) u_{\mu,t} & \text{dans } D, \\ u_{\mu,t} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.19)$$

où pour  $x \in D$ ,

$$\mu_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \{(Id + tvn)(y) : \mu(y) = 0\} \\ M & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer la dérivabilité de  $\lambda_k(\mu_t)$  et  $u_{\mu,t}$  par rapport au champ de vitesse  $vn$  comme dans [80] (voir aussi [41]). Admettant cette dérivabilité, montrons comment on établit la formule de la dérivée.

En intégrant l'équation (4.19) après l'avoir multipliée par une fonction test de  $C_0^\infty(D)$ , et en utilisant la formule de Green, nous obtenons la formulation faible

$$\int_D \nabla u_{\mu,t} \nabla w \, dx + \int_D u_{\mu,t} w \, d\mu_t = \lambda_k(\mu_t) \int_D u_{\mu,t} w \, dx \quad (4.20)$$

pour toute fonction  $w \in C_0^\infty(D)$ . Soit

$$\int_D \nabla u_{\mu,t} \nabla w \, dx + M \int_{\omega_t} u_{\mu,t} w \, dx = \lambda_k(\mu_t) \int_D u_{\mu,t} w \, dx$$

où

$$\omega_t = \{x \in D : \mu_t(x) = M\}.$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à  $t$  et en utilisant les formules classiques de dérivation par rapport au domaine, nous obtenons alors

$$\int_D \nabla u'_\mu \nabla w \, dx + M \left( \int_\omega u'_\mu w \, dx - \int_{\partial\omega} u_\mu w v \, dx \right) = \lambda'_k(\mu) \int_D u_\mu w \, dx + \lambda_k(\mu) \int_D u'_\mu w \, dx. \quad (4.21)$$



Afin d'éliminer le terme  $u'_\mu$ , nous évaluons (4.20) en  $w = u'_\mu$  et  $t = 0$ , pour en déduire

$$\int_D \nabla u_\mu \nabla u'_\mu dx + \int_D u_\mu u'_\mu d\mu = \lambda_k(\mu) \int_D u_\mu u'_\mu dx. \quad (4.22)$$

En combinant (4.21) avec  $w = u_\mu$  et (4.22), nous arrivons à

$$\lambda'_k(\mu) \int_D u_\mu^2 dx = -M \int_{\partial\omega} u_\mu^2 v dx$$

soit

$$\lambda'_k(\mu) = -\frac{M \int_{\partial\omega} u_\mu^2 v dx}{\int_D u_\mu^2 dx} = -M \int_{\partial\omega} u_\mu^2 v dx$$

pour une fonction propre  $u_\mu$  normalisée.

Exactement comme dans le cas d'une variation de frontière, on peut calculer la dérivée du volume de la mesure pour obtenir

$$|\mu|' = \int_{\partial\omega} v(x) dx.$$

### 4.3.3 Calcul numérique d'une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

#### Position du problème

Rappelons que l'on souhaite calculer l'évolution d'une fonction lignes de niveaux soumise à un champ de vitesse  $V = vn$  que nous venons d'expliciter. Autrement dit nous voulons connaître  $\Phi$ , solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - F(x) |\nabla \Phi(t, x)| = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

et vérifiant la condition de Cauchy

$$\Phi(0, x) = d(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

où  $v$  et  $d$  sont des fonctions continues données.

Remarquons que l'existence globale d'une telle solution n'a rien d'immédiat ; en effet, considérons l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) \right| = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

et supposons que  $\Phi$  est une solution de classe  $C^1$  par rapport à chacune des variables. On peut réécrire (4.23) sous la forme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - F\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x)\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (4.24)$$

où  $F(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, x)) = \text{sign}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, x))$ . Introduisons à présent les courbes caractéristiques associées à (4.24) : ce sont les courbes intégrales solutions de

$$\frac{dX}{dt}(t) = -F(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, X(t))). \quad (4.25)$$

Le long d'une courbe caractéristique  $X$ , on a

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t, X(t))) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, X(t)).$$

D'où, d'après (4.24) et (4.25),

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t, X(t))) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, X(t)) - F(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, X(t))) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t, X(t)) = 0.$$

En d'autres termes, nous retrouvons que  $\Phi$  est constante le long des courbes caractéristiques. La courbe caractéristique  $X_{x_0}$  issue de  $x_0$  n'est donc rien d'autre que la solution du système

$$\begin{cases} \frac{dX_{x_0}}{dt}(t) = -F(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0, x_0)), \\ X_{x_0}(0) = x_0. \end{cases}$$

Donc  $X_{x_0}$  est la droite paramétrée par

$$X_{x_0}(t) = x_0 - F(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0, x_0))t = x_0 - \text{sign}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0, x_0))t.$$

Supposons qu'existent  $x_1 < x_2$  tels que

$$\text{sign}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0, x_1)) = -\text{sign}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(0, x_2)) = 1$$

ou, plus généralement, tels que

$$\frac{1}{F(\Phi(0, x_1))} < \frac{1}{F(\Phi(0, x_2))}.$$

Les caractéristiques issues de  $x_1$  et  $x_2$  se coupent alors au bout d'un temps fini ce qui constitue une contradiction au théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz. Nous venons d'établir que  $\Phi$  est une solution classique de (4.23) de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  uniquement pour des états initiaux très particuliers. Ce phénomène est une difficulté courante des équations aux dérivées partielles provenant des lois de conservations. Le problème est ici de déterminer parmi les solutions faibles irrégulières celle qui correspond à l'état physique que l'on veut étudier. En 1983 M. G. Crandall et P. L. Lions (voir [22]), grâce à la notion de solution de viscosité ont apporté une réponse satisfaisante à ce problème d'existence globale pour les équations d'Hamilton-Jacobi. Nous n'entrerons pas ici dans les détails techniques de la définition d'une telle solution faible; le lecteur intéressé consultera avec profit [22] ou [78].

Nous nous contenterons ici de décrire un algorithme présenté dans [64] à même d'approcher la solution de viscosité du problème qui nous intéresse.

**Le schéma numérique de S. Osher et J. Sethian**

Considérons le système de Cauchy du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - F(x) |\nabla \Phi(t, x)| = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \Phi(0, x) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un pavé borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $u_0$  et  $v$  sont des fonctions données. Nous utiliserons dans ce qui suit les notations classiques des schémas de différences finies sur un maillage régulier de points indicés par les entiers  $i, j$ .  $\Phi$  étant déterminée à l'instant initial par la condition  $\Phi(0, x) = u_0(x)$ , l'évolution de  $\Phi$  après  $n$  pas de temps  $\Delta t$  est donnée par

$$\Phi_{ij}^{n+1} = \Phi_{ij}^n - \Delta t (\max(F_{ij}, 0) \nabla^+ \Phi + \min(F_{ij}, 0) \nabla^- \Phi)$$

où

$$\nabla^+ \Phi = \left[ \max(D_{ij}^{-x} \Phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x} \Phi, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y} \Phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y} \Phi, 0)^2 \right]^{1/2}$$

et

$$\nabla^- \Phi = \left[ \max(D_{ij}^{+x} \Phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x} \Phi, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+y} \Phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y} \Phi, 0)^2 \right]^{1/2},$$

où l'on a posé

$$D_{ij}^{+x} \Phi = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x}$$

pour un pas d'espace suivant le long de l'axe des abscisses égal à  $\Delta x$ . Les quantités  $D_{ij}^{-x} \Phi$ ,  $D_{ij}^{+y} \Phi$  et  $D_{ij}^{-y} \Phi$  s'en déduisent aisément. Enfin, pour que le problème précédent soit bien posé, nous lui ajoutons la condition au bord suivante :

$$\frac{\partial \nabla \Phi(t, x)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega.$$

**Application à un cas test**

Nous présentons ici les résultats que nous avons obtenus sur un cas test à l'aide du schéma d'ordre 1 que nous venons de décrire. Dans [64], les auteurs proposent de faire évoluer la courbe fermée  $\Gamma$ , image du paramétrage

$$\gamma(t) = (0.1 + 0.05 \sin(14\pi t) \cos(2\pi t), 0.1 + 0.05 \sin(14\pi t) \sin(2\pi t))$$

en la soumettant à un champ de vitesse normal. Autrement dit, si  $\Phi(0, \cdot)$  a pour ligne de niveau 0 la courbe  $\Gamma$ , on souhaite observer au cours du temps la fonction  $\Phi$  vérifiant l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - |\nabla \Phi(t, x)| = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

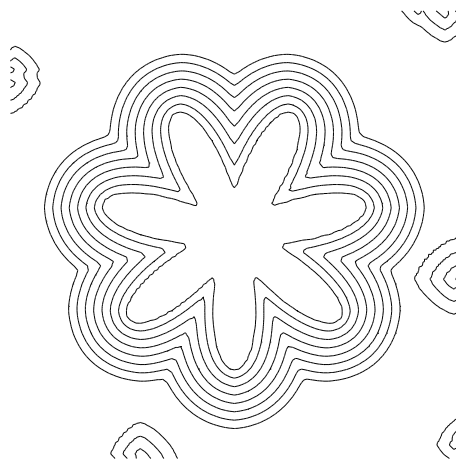


FIG. 4.3: *Évolution d'une interface sous l'action de son champ normal par un schéma d'ordre 1*

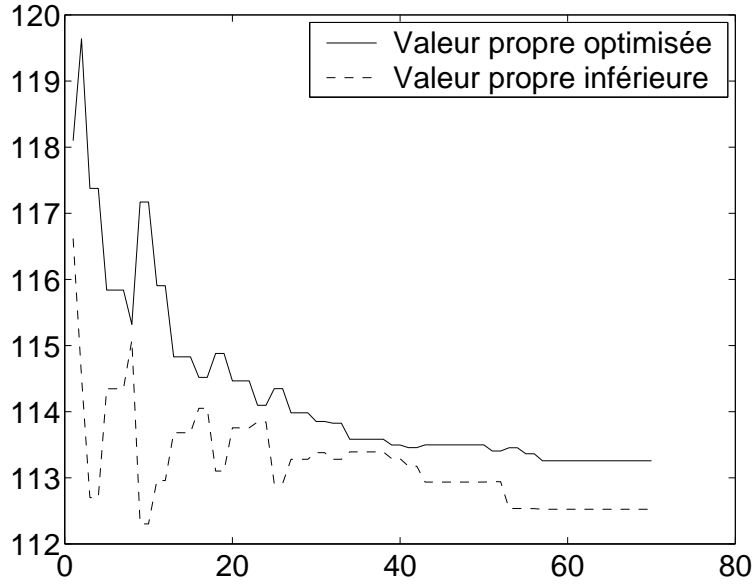
pour la résolution de laquelle S. Osher et J. Sethian dans l'article [64], utilisent un schéma d'ordre 2. Nous avons représenté pour différents pas de temps l'évolution de la courbe  $\Gamma$  sur la figure 4.3 ( $\Delta t = 0.0005$ ,  $\Delta x = 1/200$ ). Nous obtenons par cette méthode des résultats très proches de ceux présentés dans [64]. On notera cependant l'apparition de nouveaux ensembles de niveaux (en périphérie de notre figure) après 6 itérations. Cette observation souligne bien la nécessité déjà évoquée d'une réinitialisation régulière de notre fonction niveau.

#### 4.3.4 Prise en compte des valeurs propres multiples

Une difficulté que nous avons rencontrée dans la mise en application de la méthode est l'apparition, au cours de l'algorithme, de valeurs propres de multiplicité supérieure à 1. Dans une telle situation, il est connu que les valeurs propres perdent leur différentiabilité, aussi bien par rapport à une variation frontière que dans le contexte de la relaxation (on pourra consulter le chapitre 1 pour des résultats plus précis). D'un point de vue numérique, nous avons observé un comportement oscillatoire dans le cas de valeurs propres multiples.

Afin de ralentir la convergence vers une telle forme, nous avons modifié l'algorithme de gradient de la manière suivante : chaque fois que nous jugions la valeur propre minimisée  $\lambda_m$  trop proche de la valeur propre  $\lambda_{m-1}$  (à savoir  $\lambda_m - \lambda_{m-1} \leq 1$ ), nous avons modifié la direction de descente en privilégiant la minimisation de la somme  $\lambda_m + \lambda_{m-1}$  sur celle de  $\lambda_m$ . Autrement dit, nous avons remplacé le champ de vitesse  $-u_m^2 n$  par le champ  $-(u_m^2 + u_{m-1}^2)n$ .

On pourra observer sur la figure 4.4 l'évolution de  $\lambda_m$  et  $\lambda_{m-1}$  au cours des itérations de notre algorithme appliqué à la minimisation de  $\lambda_4$ . A posteriori on constate numériquement,

FIG. 4.4: Évolution de  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ 

que tous les ouverts optimaux obtenus possèdent effectivement une valeur propre au moins double.

#### 4.3.5 Traitement de la contrainte de volume

Afin de préserver l'aire du support de  $\mu$  au cours des itérations, nous avons utilisé la méthode des multiplicateurs de Lagrange exposée dans [63]. Celle-ci consiste à appliquer l'algorithme d'optimisation au lagrangien

$$L(\Phi, \nu) = \lambda_k(\mu_\Phi) + \nu |\mu_\Phi|,$$

où  $\mu_\Phi$  est la densité de mesure associée à la fonction de niveaux  $\Phi$  par la relation

$$\mu_\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x) > 0, \\ M & \text{sinon.} \end{cases}$$

et où  $M$  est une constante positive fixée. D'après les formules de dérivations calculées au paragraphe 4.3.2, la fonction de niveau  $\Phi$  évolue suivant l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - (-Mu_k^2(t, x) + \nu) |\nabla \Phi(t, x)| = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

où  $u_k(t, \cdot)$  est la fonction propre associée à  $\lambda_k(\mu_{\Phi(t, \cdot)})$ . Comme le suggèrent J. Osher et F. Santosa dans [63], nous avons adapté à chaque itération notre multiplicateur de Lagrange  $\nu$  afin de préserver la contrainte de volume.

### 4.3.6 Résultats

Nous présentons dans les figure 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 les formes obtenues grâce à la combinaison de l'algorithme génétique présenté au chapitre précédent et de l'optimisation topologique par la méthode mixte relaxation/lignes de niveaux. La qualité des résultats concernant les deux premières valeurs propres est particulièrement satisfaisante. Soulignons le résultat surprenant obtenu lors de la minimisation de  $\lambda_5$  : comme l'avaient remarqué pour  $\lambda_{13}$  S. A. Wolf et J. B. Keller dans [84], les boules ou réunions de boules ne peuvent être les seules formes optimales. Nos résultats ont ceci de remarquable, qu'ils montrent (les valeurs présentées dans le tableau 4.5 étant des majorations) que ce fait se produit dès la cinquième valeur propre.

Signalons pour conclure les limites de notre démarche : comme nous l'avons déjà mentionné, la difficulté la plus importante que nous avons rencontré est la non différentiabilité des valeurs propres multiples. La stratégie proposée au paragraphe 4.3.4 nécessite de choisir arbitrairement le moment où l'on modifie le champ de vitesse. Lors de la minimisation de  $\lambda_7$ , cette approche ne nous a pas permis d'identifier la forme présentée dans le tableau 4.5. Nous avons obtenue cette dernière grâce au théorème de S. A. Wolf et J. B. Keller que nous rappelons : soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose pour  $j = 1, \dots, k$  :

$$\lambda_j^* = \min_{|\Omega|=1} \lambda_j(\Omega) = \lambda_j(\Omega_j^*).$$

On peut alors énoncer :

**Théorème 29 (Wolf et Keller)** *Soit  $\Omega_k^*$  un ouvert non connexe de  $\mathbb{R}^N$ , minimisant  $\lambda_k$  parmi les ouverts de volume 1. Alors*

$$(\lambda_k(\Omega_k^*))^{N/2} = \min_{1 \leq j \leq (k-1)/2} ((\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{k-j}^*)^{N/2})$$

On a

$$\Omega_k^* = \left[ \left( \frac{\lambda_i^*}{\lambda_k^*} \right)^{1/2} \Omega_i^* \right] \cup \left[ \left( \frac{\lambda_{k-i}^*}{\lambda_k^*} \right)^{1/2} \Omega_{k-i}^* \right].$$

Ainsi, les  $k$  premiers domaines optimaux étant connus, on peut à l'aide de ce résultat déterminer le domaine optimal non connexe qui minimise  $\lambda_{k+1}$ . C'est ce procédé récursif qui nous a permis d'identifier l'ouvert présenté dans le tableau 4.5 qui possède une valeur propre d'indice 7 plus petite que celle de la forme trouvée par notre algorithme.













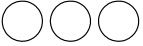



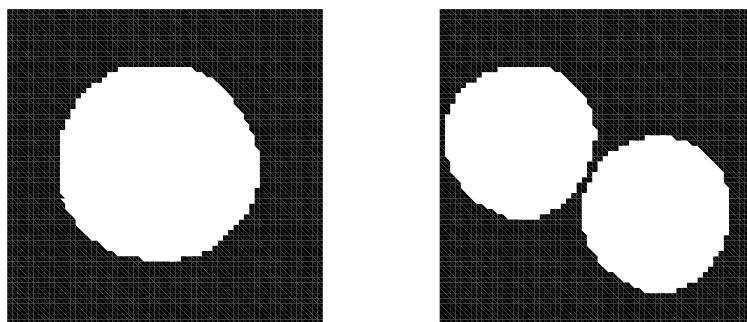
No	Formes optimales de W&K	Formes obtenues numériquement
3	 46.125	 46.125
4	 64.293	 64.293
5	 82.462	 <b>78.47</b>
6	 92.250	 <b>88.96</b>
7	 110.42	 <b>107.47</b>
8	 127.88	 <b>119.9</b>
9	 138.37	 <b>133.52</b>
10	 154.62	 <b>143.45</b>

FIG. 4.5: *Tableau récapitulatif des meilleures valeurs connues*FIG. 4.6: *Formes obtenues en minimisant les valeurs propres 1 et 2*

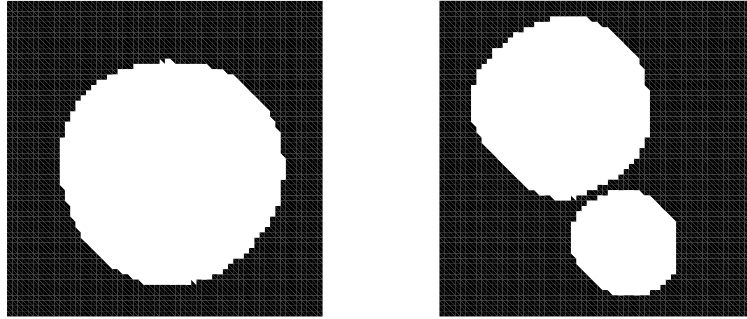


FIG. 4.7: *Formes obtenues en minimisant les valeurs propres 3 et 4*

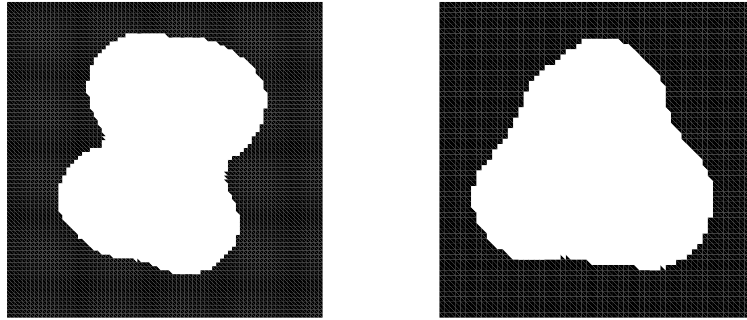


FIG. 4.8: *Formes obtenues en minimisant les valeurs propres 5 et 6*

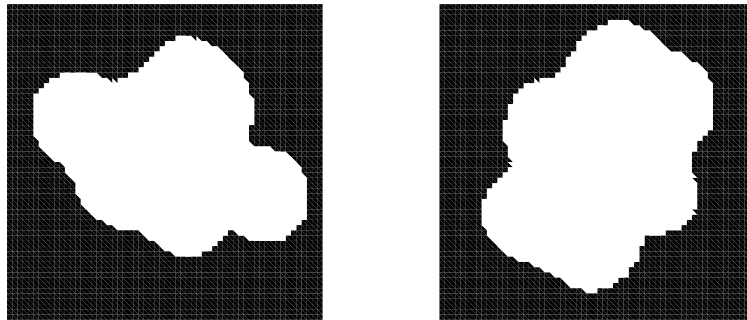


FIG. 4.9: *Formes obtenues en minimisant les valeurs propres 7 et 8*



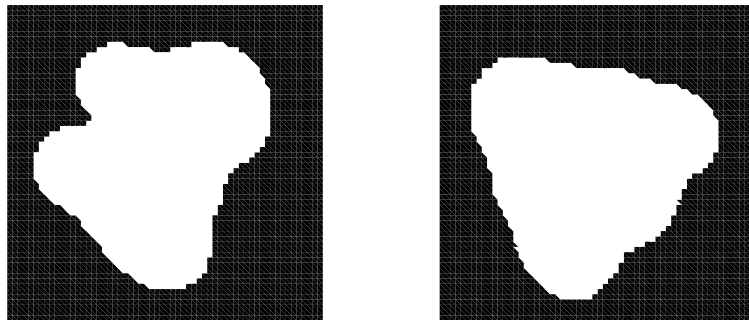


FIG. 4.10: *Formes obtenues en minimisant les valeurs propres 9 et 10*



## Deuxième partie

# Un problème d'irrigation optimale



## Chapitre 5

# Transportation Problems with Free Dirichlet Regions<sup>1</sup>

### 5.1 Introduction

Optimal mass transportation problems received a lot of attention in the last years, among all, also for extensive connections with other fields such as shape optimization, fluid mechanics, partial differential equations, geometric measure theory (see [27, 11, 71]). Given two nonnegative measures  $f^+$  and  $f^-$  over  $\mathbf{R}^N$  the problem consists in the optimization of the cost of transporting  $f^+$  into  $f^-$  by means of a *transport map*  $T : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ . More precisely, we say that  $T$  transports  $f^+$  into  $f^-$  and call  $T$  a *transport map*, if  $T_{\#}f^+ = f^-$  where  $T_{\#}$  is the push-forward operator, that is

$$f^+(T^{-1}(B)) = f^-(B) \quad \text{for every Borel set } B \subset \mathbf{R}^N. \quad (5.1)$$

Clearly, in this way, in order to have a nonempty class of admissible transport maps, we have to require that the two measures  $f^+$  and  $f^-$  have the same mass.

For every transport map  $T$  the cost of transporting  $f^+$  to  $f^-$  is defined by

$$J(T) = \int c(x, T(x)) df^+(x), \quad (5.2)$$

where  $c(x, y)$  is a given continuous nonnegative function. The problem of optimal mass transportation is then

$$\min \{ J(T) : T \text{ transports } f^+ \text{ into } f^- \}. \quad (5.3)$$

Usually the cost density  $c(x, y)$  is taken as a function of the Euclidean distance. In particular, one often chooses  $c(x, y) = |x - y|^p$ . The case  $p = 1$  is then the classical Monge transportation problem and is related to several problems in shape optimization theory

---

1. This chapter is a joint work with G. Buttazzo and E. Stepanov

(see [11]). The case  $p = 2$  is also widely studied for its applications in fluid mechanics, while the case  $p < 1$ , or more generally when  $c$  is a concave function, seems to be the most realistic for several applications, and has been studied in [34]. We would quote as general surveys on mass transportation problems the book [71] as well as the monographs [29, 27, 4], where the reader may find all the details that here, for the sake of brevity, will be omitted.

When the measures  $f^+$  and  $f^-$  may concentrate on lower dimensional sets, it may happen that no admissible transport maps exist. This is for instance the case, even if  $N = 1$ , when  $f^+ = 2\delta_0$  and  $f^- = \delta_1 + \delta_{-1}$ . For this reason it is convenient to consider, the relaxed formulation of the problem due to Kantorovich, which uses instead of transport maps  $T$ , the so called *transport plans* which are nonnegative Borel measures  $\gamma$  on the product space  $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$  such that

$$\pi_{\#}^+ \gamma = f^+, \quad \pi_{\#}^- \gamma = f^-,$$

where  $\pi^+$  and  $\pi^-$  are the projections of  $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$  on the first and second factors respectively. It is easy to see (cf. [4]) that a transport map  $T$  always induces a transport plan  $\gamma$  given by  $\gamma = (\text{Id} \times T)_{\#} f^+$ . Conversely, every transport plan  $\gamma$  which is concentrated on a  $\gamma$ -measurable graph  $\Gamma$  is induced by a suitable transport map  $T$ . The cost of a transport plan  $\gamma$  is simply given by

$$J(\gamma) = \int c(x, y) d\gamma(x, y), \quad (5.4)$$

so that the optimal mass transportation problem becomes

$$\min \{ J(\gamma) : \gamma \text{ transport plan of } f^+ \text{ into } f^- \}. \quad (5.5)$$

Again we notice that in order that the class of admissible transport plans be nonempty, then  $f^+$  and  $f^-$  must have the same mass.

Most often one considers the optimal mass transportation problem (5.5) constrained to a set  $K \subset \mathbf{R}^N$ . The latter represents a region to which the transportation process is confined. This simply means that all the geodesic paths along which the mass is carried have to remain into  $K$ . In what follows we assume that  $K = \bar{\Omega}$  is the closure of a smooth connected bounded open set  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ . The function  $c(x, y)$ , which measures the cost to carry the mass from the point  $x$  to the point  $y$ , has then to take into account that, unless  $\Omega$  is convex, the shape of  $\Omega$  modifies the length of geodesic paths. In particular, the cost function of the form  $c(|x - y|)$  has to be replaced by  $c(d_{\Omega}(x, y))$  where  $d_{\Omega}$  is the *geodesic distance* on  $\Omega$  given by the formula

$$d_{\Omega}(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 |\alpha'(t)| dt : \alpha \in \text{Lip}([0, 1]; \bar{\Omega}), \alpha(0) = x, \alpha(1) = y \right\}.$$

Furthermore, in applications one often considers the presence of the so-called Dirichlet region  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  (in the sequel assumed to be a closed set), which represents the zone where

the cost of transportation vanishes (heuristically, you are allowed to transport mass free of charge “along  $\Sigma$ ”) [11]. More formally, it means that the presence of  $\Sigma$  modifies the distance which governs the optimal mass transportation problem. In fact, setting

$$d_{\Omega, \Sigma}(x, y) = \inf \{d_{\Omega}(x, y) \wedge (d_{\Omega}(x, \xi_1) + d_{\Omega}(y, \xi_2)) : \xi_1, \xi_2 \in \Sigma\}$$

we obtain a semi-distance on  $\bar{\Omega}$  which does not count the paths that both start and end in  $\Sigma$ . Plugging this semi-distance instead of  $d_{\Omega}$  into the problem (5.5), we obtain the new optimal mass transportation problem [11]

$$\min \left\{ \int \phi(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) d\gamma(x, y) : \gamma \text{ transport plan of } f^+ + \psi^+ \text{ into } f^- + \psi^- \right\}, \quad (5.6)$$

where  $\psi^{\pm}$  are arbitrary Borel measures on  $\Sigma$ . Note that for the latter problem it is not necessary to require that  $f^+$  and  $f^-$  have the same mass.

In this paper we are studying the optimization problem of finding the “best possible” Dirichlet region  $\Sigma \subset \Omega$  subject to certain constraints. Namely, we will call  $MK(\Sigma)$  the minimum of the problem (5.6) and will be study the minimization of  $MK$  with respect to  $\Sigma$ . In the case  $f^+ : = \mathcal{L}^n \llcorner \bar{\Omega}$  and  $f^- = 0$  the functional  $MK$  reduces to the average distance functional

$$MK(\Sigma) = \int_{\Omega} \text{dist}_{\Omega}(x, \Sigma) dx,$$

where  $\text{dist}_{\Omega}(x, \Sigma) : = \inf_{y \in \Sigma} d_{\Omega}(x, y)$ .

The natural constraints for  $\Sigma$  are as follows:  $\Sigma$  can vary in the class of closed subsets of  $\bar{\Omega}$  with prescribed length (i.e.  $\mathcal{H}^1$  measure) and with prescribed finite number of connected components. In fact, it is clear that if either of the constraints is dropped, then the infimum of this optimization problem in  $\Sigma$  is trivially zero. When  $f^+ : = \mathcal{L}^n \llcorner \bar{\Omega}$ ,  $f^- = 0$  (i.e.  $MK$  is just the average distance functional) and the length constraint on  $\Sigma$  is zero, this is the famous problem of optimal location of a finite number of points in a set  $\bar{\Omega}$ . The latter has a lot of applications in economics and urban planning, but despite being extensively studied recently, still lacks a complete understanding of the qualitative properties of solutions. For a very nice recent survey on this problem we refer the reader to [62]. In this paper we however will be more interested in a slightly different version of the problem, namely, when the length constraint is nonzero, but, just for the sake of simplicity, the set  $\Sigma$  is required to be connected (it will be clear from our results that just allowing a finite number of connected components will not change the qualitative properties of each of the components). We will show that an optimal  $\Sigma_{opt}$  exists and we study some geometrical properties of  $\Sigma_{opt}$  in the simplest situation when  $MK$  is reduced to the average distance functional. We also present some numerical computations which show the shape of  $\Sigma_{opt}$  in some model examples in order to justify some of our conjectures which still lack a rigorous proof.

## 5.2 Existence of optimal sets

Let  $l \geq 0$  be fixed and let  $\Omega$  be a bounded connected subset of  $\mathbf{R}^N$  with a Lipschitz boundary. We also fix two nonnegative measures  $f^+$  and  $f^-$  on  $\bar{\Omega}$  and consider the optimization problem

$$\min \{MK(\Sigma) : \Sigma \subset \bar{\Omega} \text{ closed, connected, } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l\} \quad (5.7)$$

where the functional  $MK$  is defined in the introduction. We have the following existence result.

**Theorem 1** *Let the function  $\phi$  be continuous. Then the problem (5.7) admits a solution.*

**Proof.** Let a sequence  $\{\Sigma_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  of closed connected subsets of  $\bar{\Omega}$  be a minimizing sequence for the functional  $MK$ , satisfying  $\mathcal{H}^1(\Sigma_\nu) \leq l$  for all  $\nu \in \mathbf{N}$ . According to the Blaschke theorem (theorem 4.4.6 of [5]) one has  $\Sigma_\nu \rightarrow \Sigma$  in the sense of Hausdorff convergence up to a subsequence (not relabeled), while  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  is still closed and connected. Moreover, in view of the Golab theorem (theorem 4.4.7 of [5]) one also has  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$ . Observing now that the Hausdorff convergence implies  $d_\Omega(x, \Sigma_\nu) \rightarrow d_\Omega(x, \Sigma)$  for all  $x \in \bar{\Omega}$ , we obtain

$$d_{\Omega, \Sigma_\nu}(x, y) \rightarrow d_{\Omega, \Sigma}(x, y)$$

for all  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ . Moreover, since all  $d_{\Omega, \Sigma_\nu}$  are Lipschitz-continuous for the Euclidean distance with the same Lipschitz constant, then the convergence is actually uniform.

Let now  $\gamma_\nu$  be the respective optimal transport plans, i.e.

$$MK(\Sigma_\nu) = \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \phi(d_{\Omega, \Sigma_\nu}(x, y)) d\gamma_\nu(x, y),$$

while

$$\pi_{\#}^+ \gamma_\nu - \pi_{\#}^- \gamma_\nu = f^+ - f^- \text{ on } \bar{\Omega} \setminus \Sigma_\nu.$$

The sequence  $\{\gamma_\nu(\bar{\Omega})\}_{\nu=1}^\infty$  can be assumed bounded, and hence up to a subsequence (again not relabeled)  $\gamma_\nu \rightharpoonup \gamma$   $*$ -weakly in the sense of measures, where  $\gamma$  is some positive Borel measure over  $\bar{\Omega}$ . Clearly then

$$\pi_{\#}^+ \gamma - \pi_{\#}^- \gamma = f^+ - f^- \text{ on } \bar{\Omega} \setminus \Sigma.$$

In fact, for every  $\psi \in C_0(\bar{\Omega} \setminus \Sigma)$  one has

$$\int_{\bar{\Omega}} \psi d(\pi_{\#}^+ \gamma - \pi_{\#}^- \gamma) = \lim_{\nu} \int_{\bar{\Omega}} \psi d(\pi_{\#}^+ \gamma_\nu - \pi_{\#}^- \gamma_\nu) = \int_{\bar{\Omega}} \psi d(f^+ - f^-),$$

since every function with compact support in  $\bar{\Omega} \setminus \Sigma$  has also compact support in  $\bar{\Omega} \setminus \Sigma_\nu$  for sufficiently large  $\nu \in \mathbf{N}$  (this follows from the convergence  $\Sigma_\nu \rightarrow \Sigma$  in the sense of Hausdorff). At last it remains to observe that

$$MK(\Sigma) \leq \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \phi(d_{\Omega, \Sigma}(x, y)) d\gamma(x, y) = \lim_{\nu} \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \phi(d_{\Omega, \Sigma_\nu}(x, y)) d\gamma_\nu(x, y),$$



which shows that  $\Sigma$  is a minimizer of the problem.  $\square$

We remark that a word-to-word restating of this proof shows even a formally slightly general result, namely, that the functional  $M$  attains a minimum even over a class of closed subsets  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  with  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l$  and having fixed prescribed number of connected components. The latter case includes also the situation  $l = 0$  but the number of connected components is more than one. If  $f^+ := \mathcal{L}^n \llcorner \bar{\Omega}$  and  $f^- = 0$ , the functional  $MK$  reduces to the average distance functional, and (5.7) is just the problem of optimal location of a finite number of points in  $\bar{\Omega}$  (see [62]).

### 5.3 Qualitative properties of optimal sets

In this section we consider some qualitative properties every optimal solution  $\Sigma_{opt}$  to the problem (5.7) has to fulfill. We present here some problems together with some conjectures which we believe are true. We also present some numerical approximations of  $\Sigma_{opt}$  in different particular situations as well as proofs of some results which though sometimes weaker than our expectations, still induce to think that the conjectures we formulate most probably hold true.

When formulating the problems below we assume that  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  is a bounded connected open set with Lipschitz boundary and that the measures  $f^+$  and  $f^-$  are absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure and different from each other. For simplicity we consider only the case of the cost function  $\phi(t) = t$ , though most of the questions below could also be raised for more general cost functionals.

**Problem I. (*Regularity*).** Study the regularity properties of the solutions  $\Sigma_{opt}$ . We actually expect that  $\Sigma_{opt}$  are piecewise smooth, i.e. made of a finite number of smooth curves connected through a finite number of singular points.

**Problem II. (*Absence of loops*).** Study the topological properties of the solutions  $\Sigma_{opt}$ . We expect that  $\Sigma_{opt}$  do not form closed loops in  $\Omega$ . When the dimension  $N$  is equal to 2 this can be expressed by saying that  $\Omega \setminus \Sigma$  is connected.

**Problem III. (*Triple points*).** Study the nature of the singular points mentioned in Problem I. We expect that they can only be triple points, that is points where three curves meet, with angles of 120 degrees.

**Problem IV. (*Distance from the boundary*).** Study the cases when the optimal solutions  $\Sigma_{opt}$  do not touch the boundary  $\partial\Omega$ . We expect that this occurs when  $\Omega$  is convex.

**Problem V. (*Behavior for small length*).** Study the asymptotic behaviour of  $\Sigma_{opt}$  as  $l \rightarrow 0$ . In particular we expect that for  $l$  small enough  $\Sigma_{opt}$  is a smooth curve without singular points. More in general, it would be interesting to obtain an estimate of the number of singular points in terms of the length of  $\Sigma_{opt}$ .

**Problem VI. (*Behavior for large lengths*).** Study the asymptotic behaviour of  $\Sigma_{opt}$  as  $l \rightarrow +\infty$ . It is not difficult to see that the value  $V_l$  of the optimization problem (5.7) vanishes as  $l \rightarrow +\infty$ . It would be interesting to evaluate more precisely the vanishing

quantity  $V_l$  and to study the  $\Gamma$ -limit as  $l \rightarrow +\infty$  of the rescaled functionals

$$G_l(\Sigma) = \frac{1}{V_l} MK(\Sigma)$$

with respect to the convergence

$$\Sigma_l \rightarrow \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{l} \mathcal{H}^1 \llcorner \Sigma_l \rightarrow \lambda \quad \text{weakly* in the sense of measures.}$$

We now start to develop the program introduced above by considering the simpler situation when  $\Omega$  is convex,  $f^+$  is the Lebesgue measure on  $\Omega$ ,  $f^- = 0$ . Then  $MK(\Sigma)$  reduces to the average distance functional and  $\text{dist}_\Omega$  to the Euclidean distance, so that the problem (5.7) becomes

$$\min \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma) dx : \Sigma \subset \bar{\Omega} \text{ closed, connected, } \mathcal{H}^1(\Sigma) \leq l \right\}. \quad (5.8)$$

### 5.3.1 Problem in a unit disk of $\mathbf{R}^2$

We start by considering the case when  $\Omega$  is the unit disc in  $\mathbf{R}^2$ . The first guess for  $\Sigma_{opt}$  in the case  $l$  is sufficiently small would be a circumference centered at the origin, which is however ruled out by the theorem 2. A second guess for  $\Sigma_{opt}$ , always in the case of a sufficiently small  $l$ , would be a segment centered at the origin. This is again excluded by the proposition below.

**Proposition 1** *There exists  $l_0 > 0$  such that for all  $l \leq l_0$  the centered segment of length  $l$  is not optimal for problem (5.8).*

The proof of this fact can be found in the Appendix B.

We will now discuss the numerical approximations of the optimal set in a unit disc of  $\mathbf{R}^2$ . We will limit ourselves to presenting the results and ideas of the methods rather than the technical aspects of our algorithms. The latter have been described in details in chapter 2. Two cases will be subject of our numerical study:

- (i)  $\Sigma$  is a set consisting of finite prescribed number of points;
- (ii)  $\Sigma$  is a compact connected set with prescribed length.

For each of the above constraints we use a different numerical approach.

### Optimal location of a finite number of points

Given  $n \in \mathbf{N}$ , we are looking for an optimal  $n$ -point set  $\Sigma_n$ , which minimizes the quantity (5.8). If  $n = 1$ , it is not difficult to prove that the only minimizer is the center of the disk. To approximate numerically  $\Sigma_n$  for  $n > 1$ , we use the classical finite difference method. As underlined in [48], this is a reasonable way to solve design optimization problems with few parameters. We present here two pictures obtained by this process. The first one shows that for  $n = 5$  the optimal set  $\Sigma_5$  seems to be distributed on a regular centered polygon. The same situation has been observed for  $n = 2, 3, 4$ . The second image represents the case of  $n = 6$ , and one can observe that the center of the disk (or a point very close to the center) is one in the optimal position.

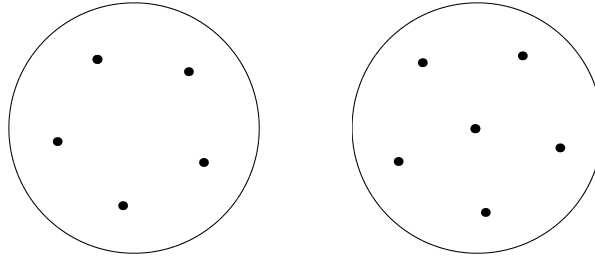


FIG. 5.1: *Optimal locations of 5 and 6 points in a disk*

### Optimal compact connected set with prescribed length

We are now looking for an optimal set  $\Sigma_{opt}$  among all compact connected sets of the disk with one-dimensional Hausdorff measure not exceeding  $l$ . This situation is definitely more complex from a numerical point of view than the previous one. The main problem is to build a process which is able to identify the topology of  $\Sigma_l$ . Moreover, it is intuitively clear that this problem has a great number of local minima. Last but not least, the length constraint is rather difficult to deal with numerically. Considering these difficulties, it seems natural to use an Evolutionary Algorithm (EAs) with an adaptive penalty method. We will not present here the theory of EAs but we refer the interested reader to [75] for an introduction to Adaptive methods in EAs. Further numerical details like the representation of  $\Sigma_{opt}$ , the cost function, the adaptive penalty and different test cases have been described more accurately in chapter 2.

In figure 5.2 one can see the values  $V(l)$  obtained by the chosen numerical method as a function of length constraint  $l$ . They are compared to numerical evaluations of (5.8) for some simple sets like a circumference, a regular cross (of two perpendicular intervals), a regular trisection (i.e. 3 equal intervals joined at one of their endpoints at the angle of 120 degrees each) and a segment, all centered at the origin. In this figure

- o stands for the circumference centered at the origin,
- + stands for the centered perpendicular cross,
- \* stands for the regular trisection,
- - stands for the segment,
- stands for the numerical approximations of optimal sets.

In the same figure we present a graph of  $lV(l)$  as a function of  $l$  (in fact, in theorem 5 we will show that the quantity  $lV(l)$  for the optimal set is bounded as  $l \rightarrow +\infty$ ).

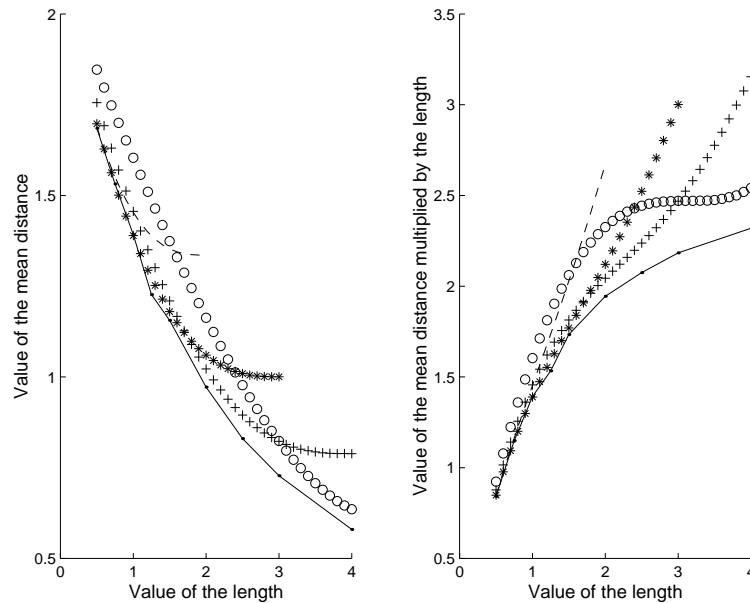
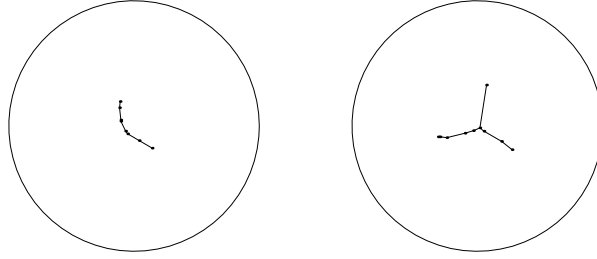
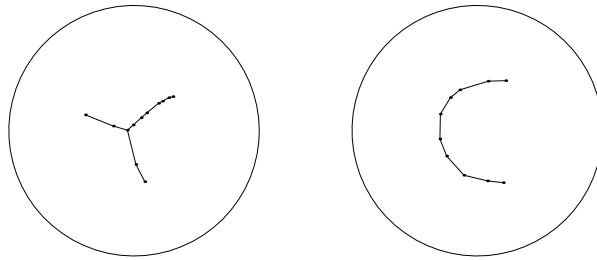


FIG. 5.2:

In figures 5.3–5.5 the numerical approximations of optimal sets in a disc for different lengths are shown. Perhaps somewhat unexpected is the fact that the number of singular points is not an increasing function of the prescribed length. We present more numerical results in Appendix C.

FIG. 5.3: *Optimal sets of length 0.5 and 1 in a unit disk*FIG. 5.4: *Optimal sets of length 1.25 and 1.5 in a unit disk*

### 5.3.2 Singular points

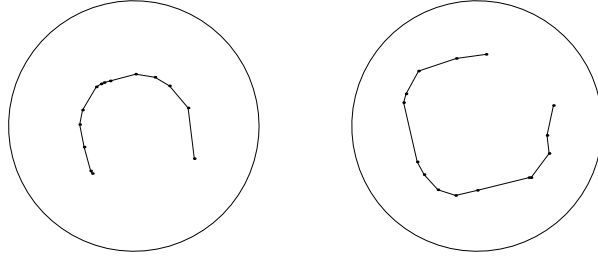
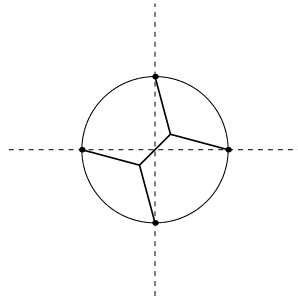
From now on we present some simple results on the qualitative properties of the optimal set  $\Sigma_{opt}$  for the generic convex ambient set  $\bar{\Omega}$ . The results we present here do not completely answer the questions posed in the beginning of this section, but rather indicate what kind of strong results one can reasonably expect.

We start from a very simple proposition which gives a partial answer to the problem III, restricting, roughly speaking, the possible singularities of the optimal set to only triple points, i.e. points where three curves meet with angles of 120 degrees. In order not to overburden the paper with technical details we just formulate the proposition in its simplest way, namely, we assert that a cross can never be an optimal set in  $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^2$ . We call a cross the union of two mutually perpendicular closed intervals intersecting in a point which is internal for both.

**Proposition 2** *Let  $N = 2$ . Then a cross is not an optimal set.*

**Proof.** Assume the contrary, i.e. that  $\Sigma_{opt}$  is a cross, and assume without loss of generality that its center (i.e. the intersection point of two intervals) is the origin of coordinate system.

STEP 1. For every sufficiently small  $\varepsilon > 0$  the set  $D_\varepsilon := \Sigma_{opt} \cap \partial B_\varepsilon(0)$  consists of exactly 4 points. Denote by  $S_4(D_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$  the set of minimum length in the ball  $B_\varepsilon(0)$

FIG. 5.5: *Optimal sets of length 2 and 3 in a unit disk*FIG. 5.6: *Steiner connection*

which connects all the four points of  $D_\varepsilon$  (we will call it the *Steiner connection* of these points). Observe now that

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(0)) - \mathcal{H}^1(S_4(D_\varepsilon)) \geq C\varepsilon$$

for some  $C > 0$  (here and below  $C$  may be different in different occasions). In fact, to show this estimate, it is enough to prove its rescaled version

$$\mathcal{H}^1((1/\varepsilon)\Sigma_{opt} \cap B_1(0)) - \mathcal{H}^1(S_4(D_1)) \geq C,$$

which follows from the direct computation

$$\mathcal{H}^1((1/\varepsilon)\Sigma_{opt} \cap B_1(0)) = 4 \text{ and } \mathcal{H}^1(S_4(D_1)) = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) < 4.$$

STEP 2. Let now  $\Sigma_\varepsilon$  be  $\Sigma_{opt}$  outside of  $B_\varepsilon(0)$  and  $S_4(D_\varepsilon)$  inside  $B_\varepsilon(0)$ . Clearly then

$$\text{dist}(x, \Sigma_\varepsilon) \leq \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) + 2\varepsilon.$$

Moreover, let  $\Lambda_\varepsilon$  stand for the set of points whose projection on  $\Sigma_{opt}$  lies inside  $B_\varepsilon(0)$ . Since all such points clearly belong to the union of two strips with the sides parallel to

the intervals of the cross, then  $\mathcal{L}^2(\Lambda_\varepsilon) = C\varepsilon + o(\varepsilon)$  for some  $C > 0$ . Therefore

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_\varepsilon) dx \leq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx + C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

According to the result of the Step 1, we have however at least the additional length  $C\varepsilon$  to attach in order to decrease the functional. This is achieved by using the lemma 1, namely, according to this lemma we can attach a segment of this length to  $\Sigma_\varepsilon$  obtaining a set  $\Sigma'_\varepsilon$  so that

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma'_\varepsilon) dx \leq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_\varepsilon) dx - C\varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2}).$$

As  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  one has then

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma'_\varepsilon) dx \leq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx - C\varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2}),$$

for some  $C > 0$ , which contradicts the optimality of  $\Sigma_{opt}$ .  $\square$

**Remark 30** *In the same way, replacing any multiple connection by its Steiner configuration, it is possible to restrict the possible "regular" singularities of the optimal set to triple points.*

### 5.3.3 Absence of loops

Now we present a result giving a partial answer to the problem II. Of course, it is weaker than what we really expect, because in fact it does not exclude the presence of "closed" loops in the optimal set  $\Sigma_{opt}$ , if the latter is irregular (just think of a small circle to which small branches are attached at a point with every rational angle). But, as suggested in the formulation of Problem I we actually do not expect such horrible sets to be optimal.

**Theorem 2** *Let  $N = 2$ . Then for  $\mathcal{H}^1$ -a.e.  $x \in \Sigma_{opt}$  and for all  $\varepsilon > 0$  the set  $\Sigma_{opt} \setminus B_\varepsilon(x)$  is disconnected.*

**Proof.** Suppose the contrary, namely that the set

$$A := \{x \in \Sigma_{opt} : \exists \varepsilon > 0 \text{ such that } \Sigma_{opt} \setminus B_\varepsilon(x) \text{ is connected}\}$$

has positive length, i.e.  $\mathcal{H}^1(A) > 0$ .

Let  $\tilde{A} \subset A$  stand for the set of density points of  $\Sigma_{opt}$ , i.e. such that for every  $x \in \tilde{A}$  one has

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x))}{2\varepsilon} = 1.$$

Since  $\Sigma_{opt}$  is  $(\mathcal{H}^1, 1)$ -rectifiable, then by Marstrand-Mattila theorem  $\mathcal{H}^1(\tilde{A}) = \mathcal{H}^1(A)$ .

For every  $x \in \tilde{A}$  and  $\varepsilon > 0$  let  $T(x, \varepsilon)$  stand for the union of transport rays of the Monge-Kantorovich problem of transporting  $\mathcal{L}^n \llcorner \bar{\Omega}$  to its projection over  $\Sigma$  which end at  $\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x)$ . Set  $\Sigma_\varepsilon(x) := \Sigma_{opt} \setminus B_\varepsilon(x)$ . Clearly, according to our assumption,  $\Sigma_\varepsilon(x)$  is still closed and connected, and, of course, satisfies the length constraint since  $\mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon(x)) \leq \mathcal{H}^1(\Sigma_{opt})$ . The following estimate is valid

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon(x)) dz &= \\ &= \int_{\bar{\Omega} \setminus T(x, \varepsilon)} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon(x)) dz + \int_{T(x, \varepsilon)} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon(x)) dz \leq \\ &= \int_{\bar{\Omega} \setminus T(x, \varepsilon)} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz + \int_{T(x, \varepsilon)} (\text{dist}(z, \Sigma_{opt}) + \varepsilon) dz = \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz + \varepsilon \mathcal{L}^n(T(x, \varepsilon)). \end{aligned}$$

One has also

$$\mathcal{L}^n(T(x, \varepsilon)) = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x)),$$

which implies

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_{opt} \cap B_\varepsilon(x)) \leq C\varepsilon + o(\varepsilon),$$

since  $x \in \tilde{A}$ , for some  $C = C(x) > 0$  depending on  $x$ . Summing up, for  $x \in \tilde{A}$  one has

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon(x)) dz \leq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz + C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (5.9)$$

Let now

$$l(\varepsilon) := \mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon(x)).$$

Since we chose  $x \in \tilde{A}$ , one has  $l(\varepsilon) = C\varepsilon + o(\varepsilon)$  for  $\varepsilon \rightarrow 0$  for some  $C = C(x) > 0$ . Applying now lemma 1 with  $\Sigma_\varepsilon(x)$  instead of  $\Sigma$  and  $l(\varepsilon)$  instead of  $\varepsilon$  to find a closed connected  $\Sigma' \subset \bar{\Omega}$  satisfying  $\mathcal{H}^1(\Sigma') = \mathcal{H}^1(\Sigma) + l(\varepsilon)$  and

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma') dx < \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_\varepsilon(x)) dx + C\varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2})$$

for some  $C > 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Using (5.9) and taking into account  $n = 2$ ,

Using (5.9), one arrives at the estimate

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma') dx &\leq \\ &\leq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) d(z) - C\varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , which gives a contradiction with the optimality of  $\Sigma_{opt}$ .  $\square$

**Lemma 1** *Let  $N = 2$  and  $\Sigma \subset \bar{\Omega}$  be a compact connected set such that  $\Sigma \cap \Omega \neq \emptyset$ . Then there is a constant  $C > 0$  such that for all  $\varepsilon > 0$  there is a segment  $S_\varepsilon$  of length  $\varepsilon$  such that the following conditions hold:*

- *The set  $\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup S_\varepsilon$  is connected;*



– *The inequality*

$$\int_{\Omega} \text{dist}(z, \Sigma_{\varepsilon}) \, dz \leq \int_{\Omega} \text{dist}(z, \Sigma) \, dz - C\varepsilon^{3/2}$$

is true for sufficiently small  $\varepsilon > 0$ .

**Proof.** Let  $A \in \Sigma \cap \Omega$  and  $O \in \Omega \setminus \Sigma$  such that  $A$  is one a projection of  $O$  on  $\Sigma$ . Without loss of generality consider the coordinate axes to be positioned so that  $O$  is the origin of the coordinate system and the following conditions are satisfied:

- $B_1(0) \subset \Omega$ ;
- $\Sigma \cap B_1(0) = \emptyset$  where  $B_1(0)$  stands for the unit open disc;
- $A = (0, -1) \in \Sigma \cap \bar{B}_1(0)$ .

Let  $A_{\varepsilon} = (0, -1 + \varepsilon)$ ,  $S_{\varepsilon} = [A, A_{\varepsilon}]$  stand for the closed interval with endpoints  $A$  and  $A_{\varepsilon}$  and  $\Sigma_{\varepsilon} = \Sigma \cup S_{\varepsilon}$ . Consider the set

$$\Lambda_{\varepsilon} = \{z = (x, y) \in B_1(0) : y \leq 0, \, d(z, A_{\varepsilon}) - \text{dist}(z, \partial B_1(0)) \leq -\varepsilon/2\}.$$

If we are able to prove that  $\mathcal{L}^n(\Lambda_{\varepsilon}) \geq C\varepsilon^{1/2}$  for some  $C > 0$ , then the proof will be finished. Indeed, for  $z \in \Lambda_{\varepsilon}$  one has

$$\text{dist}(z, \Sigma_{\varepsilon}) \leq d(z, A_{\varepsilon}) \leq \text{dist}(z, \partial B_1(0)) - \varepsilon/2 \leq \text{dist}(z, \Sigma) - \varepsilon/2,$$

and hence

$$\int_{\Omega} \text{dist}(z, \Sigma_{\varepsilon}) \, dz - \int_{\Omega} \text{dist}(z, \Sigma) \, dz \leq -\varepsilon \mathcal{L}^n(\Lambda_{\varepsilon}) / 2 \leq -C\varepsilon^{3/2}$$

It remains therefore to estimate  $\mathcal{L}^n(\Lambda_{\varepsilon})$  from below. Let  $0 < k < 1/2$  and

$$\mathbf{\Pi}_{k,\varepsilon} = \left\{ z = (x, y) \in B_1(0) : y \leq 0, \, |y + 1/2| \leq (1 - 4k^2)^{1/2}/2, \, |x| \leq k\varepsilon^{1/2} \right\}.$$

For every  $(x, y) \in \mathbf{\Pi}_{k,\varepsilon}$ , we have

$$\begin{aligned} d(z, A_{\varepsilon}) - \text{dist}(z, \partial B_1(0)) &\leq (x^2 + (y + 1 - \varepsilon))^{1/2} - 1 + (x^2 + y^2)^{1/2} \\ &\leq (k^2\varepsilon + (y + 1 - \varepsilon))^{1/2} - 1 + (k^2\varepsilon + y^2)^{1/2} \\ &\leq -1 + |y| + k^2\varepsilon/2|y| + (y + 1) + \\ &\quad \varepsilon(k^2 - 2(y + 1))/2(y + 1) \\ &= \varepsilon(k^2/(y + 1) - 2 + k^2/|y|)/2. \end{aligned}$$

It is easy to verify that since  $z \in \Pi_{k,\varepsilon}$ , then

$$k^2/(y+1) - 2 + k^2/|y| \leq -1,$$

and hence

$$d(z, A_\varepsilon) - \text{dist}(z, \partial B_1(0)) \leq -\varepsilon/2,$$

which means  $\Pi_{k,\varepsilon} \subset \Lambda_\varepsilon$ . Thus

$$\mathcal{L}^n(\Lambda_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^n(\Pi_{k,\varepsilon}) \geq C\varepsilon^{1/2},$$

for sufficiently small  $\varepsilon > 0$ , which concludes the proof.  $\square$

### 5.3.4 The optimal set and the boundary

We are able to announce now the partial answer to the Problem IV. It is, of course, much weaker than what we expect: in fact, it only says that the intersection of  $\Sigma_{opt}$  with  $\partial\Omega$  cannot have a positive surface measure. Moreover, it is only proven when  $N = 2$  and for  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  strictly convex and sufficiently regular.

**Theorem 3** *Let  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  be a strictly convex set with  $C^2$  boundary and  $\Sigma_{opt}$  be a solution to the problem (5.8). Then  $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega) = 0$ .*

**Proof.** Suppose the contrary, i.e.  $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega) =: \alpha > 0$ . Consider then for every  $\varepsilon > 0$  the set

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

and let  $p_\varepsilon$  stand for the projection map on the closed convex set  $\bar{\Omega}_\varepsilon$ , namely,

$$p_\varepsilon(x) := x - (\varepsilon - d(x))^+ \nabla d(x),$$

where  $d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$  and  $(\cdot)^+$  stands for the positive part function. Let  $\Sigma_\varepsilon := p_\varepsilon(\Sigma_{opt})$ . Clearly,  $\Sigma_\varepsilon$  is still connected and compact.

STEP 1. Let us estimate from below

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon).$$

This difference is nonnegative since  $p_\varepsilon$  is Lipschitz continuous with constant one. To make a more precise estimate, we note that

$$\nabla p_\varepsilon(x) := Id - (\varepsilon - d(x))^+ \nabla^2 d(x) + \nabla d(x) \otimes \nabla d(x), \text{ for } 0 \leq d(x) < \varepsilon,$$

where  $Id$  stands for the identity matrix. In particular, for  $x \in \partial\Omega$  one has

$$\nabla p_\varepsilon(x) := T - \varepsilon \nabla^2 d(x) \text{ where } T := Id - \nabla d(x) \otimes \nabla d(x).$$

A simple calculation shows  $(Tz, z) = |z|^2 - |z_\nu|^2 \leq |z|^2$ , where  $z_\nu$  stands for the projection of  $z$  on the direction of the normal  $\nu := \nabla d(x)$  to the boundary  $\partial\Omega$  at point  $x$ . Since we assumed  $\partial\Omega \in C^2$ , then  $\nabla^2 d$  is continuous over  $\partial\Omega$ , and, moreover, since  $\Omega$  is supposed to be strictly convex, then the matrix  $\nabla^2 d(x)$  is positively determined. Therefore, there is a  $K > 0$  such that  $(\nabla^2 d(x)z, z) \geq K|z|^2$  for all  $x \in \partial\Omega$ . Summing up, we have

$$|\nabla p_\varepsilon(x)z| \leq (1 - K\varepsilon)|z|$$

for all  $x \in \partial\Omega$ .

Without loss of generality we may suppose that  $\partial\Omega$  is parametrized by a curve and let  $\gamma: [0, L] \rightarrow \partial\Omega$  be the arclength parametrization of  $\partial\Omega$ . Then, setting  $e := \Sigma_{opt} \cap \partial\Omega$ , we get by the area formula

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(p_\varepsilon(e)) &= \int_{\gamma^{-1}(e)} |\nabla p_\varepsilon(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \leq \\ &= (1 - K\varepsilon) \int_{\gamma^{-1}(e)} |\gamma'(t)| dt = \\ &= (1 - K\varepsilon)\mathcal{H}^1(e). \end{aligned}$$

Hence we finally arrive at the estimate

$$\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon) \geq \mathcal{H}^1(e) - \mathcal{H}^1(p_\varepsilon(e)) \geq K\alpha\varepsilon.$$

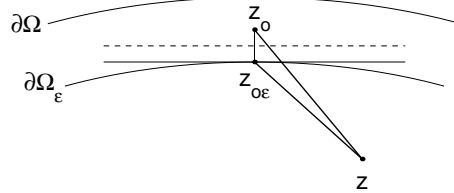


FIG. 5.7:

STEP 2. Clearly,

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) dz \geq \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz.$$

We now estimate more precisely the difference between the two integrals. For this purpose consider a point of  $z \in \Omega$  for which

$$\text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) > \text{dist}(z, \Sigma_{opt}). \quad (5.10)$$

Denote by  $z_0$  a arbitrary projection of  $z$  to  $\Sigma_{opt}$ . Then obviously  $z_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$ . We claim first that  $z \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$ . In fact, suppose the contrary, and let  $z_{0\varepsilon}$  stand for the projection of  $z_0$  to  $\partial\Omega_\varepsilon$ . Since  $\Omega_\varepsilon$  is convex, then  $z$  belongs to a half-plane bordered by a tangent line to  $\Omega_\varepsilon$  at  $z_{0\varepsilon}$ , and hence also to the half-plane bordered by a line passing through the center of the segment  $[z_0, z_{0\varepsilon}]$  perpendicular to the latter (see figure 5.7). This implies  $d(z, z_{0\varepsilon}) < d(z, z_0)$  and therefore

$$\text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) \leq d(z, z_{0\varepsilon}) < d(z, z_0) = \text{dist}(z, \Sigma_{opt})$$

which contradicts the assumption (5.10).

Let now  $z_\varepsilon$  stand for a projection of  $z$  on  $\partial\Omega_\varepsilon$ . One has then

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) - \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) &= d(z, z_\varepsilon) - d(z, z_0) \\ &\leq d(z, z_\varepsilon) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

With the above estimate we get

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) dz - \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz &\leq \int_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) - \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz \\ &\leq \varepsilon \mathcal{L}^2(\bar{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon) \\ &= C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{5.11}$$

for some  $C \geq 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

STEP 3. Consider  $O \in \bar{\Omega}_\varepsilon \setminus \Sigma_\varepsilon$  and its arbitrary projection  $O_\varepsilon$  to  $\Sigma_\varepsilon$ . We define

$$\Sigma'_\varepsilon := \Sigma_\varepsilon \cup S_\varepsilon$$

where  $S_\varepsilon$  is a segment of length  $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) - \mathcal{H}^1(\Sigma_\varepsilon)$  starting at  $p_\varepsilon(O)$  and pointing to  $O$ . In view of the lemma 1 one has

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma'_\varepsilon) dz - \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_\varepsilon) dz \geq C\varepsilon^{3/2} \tag{5.12}$$

for some  $C > 0$ . Combining (5.11) and (5.12), we have

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma_{opt}) dz - \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, \Sigma'_\varepsilon) dz \leq -C\varepsilon^{3/2} + o(\varepsilon^{3/2})$$

for  $C > 0$  when  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , which contradicts the optimality of  $\Sigma_{opt}$ .  $\square$

Now we prove a result which in a sense is much stronger, namely, that when the length of the optimal set is sufficiently small, it must stay away from the boundary  $\partial\Omega$ . The result will be proven for generic  $N$ .

**Theorem 4** *There exists an  $l_0 > 0$  and  $d_0 > 0$  which depend only on  $\Omega$  and on  $N$  such that for all  $l < l_0$  the optimal set  $\Sigma_{opt}$  solving the problem (5.7) satisfies  $\text{dist}(\Sigma_{opt}, \partial\Omega) > d_0$ , in particular,  $\Sigma_{opt} \cap \partial\Omega = \emptyset$ .*

**Proof.** Supposing the contrary, we have a sequence of optimal sets  $\Sigma_\nu \subset \bar{\Omega}$  such that  $\mathcal{H}^1(\Sigma_\nu) \rightarrow 0$  and  $\text{dist}(\Sigma_\nu, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Up to a subsequence we may assume  $\Sigma_\nu$  to be converging in Hausdorff sense to some compact connected  $\Sigma$ . Since then  $\mathcal{H}^1(\Sigma) = 0$  according to the Golab theorem, then  $\Sigma$  consists of a single point  $\Sigma = \{P\}$ . Moreover, clearly,  $P \in \partial\Omega$ . An word to word restating of the argument used to prove the existence theorem 1, shows that  $P$  is optimal in the sense it minimizes the distance functional  $\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, Q) dx$  among all  $Q \in \bar{\Omega}$ . According to the lemma 2 below such a point should belong to  $\Omega$ , which is a contradiction.  $\square$

**Lemma 2** *Consider the optimal location problem for a single point set in a convex  $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^N$ , i.e. a problem of finding a point  $P \in \bar{\Omega}$  which provides the minimum of*

$$\inf \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, Q) dx : Q \in \bar{\Omega} \right\}.$$

*Then  $P \notin \partial\Omega$ .*

**Proof.** Let  $P \in \partial\Omega$  be an arbitrary point of  $\partial\Omega$ . We will show that it is never optimal. In fact, without loss of generality assume that  $P$  is the origin of the coordinate system  $(x_1, \dots, x_N)$  and that the first  $N - 1$  coordinates  $(x_1, \dots, x_{N-1})$  are in the supporting hyperplane of  $\Omega$  at  $P$ . consider

$$F(x_1, \dots, x_N) := \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(z, (x_1, \dots, x_N)) dz.$$

Then for each  $i = 1, \dots, N$  one has

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = \int_{\bar{\Omega}} \frac{z_i}{d(z, P)} dz < 0$$

showing the claim.  $\square$

### 5.3.5 Asymptotic estimates

We claim the following result on the asymptotic behavior of the minimum value of the functional  $MK$  as the prescribed length tends to infinity, which gives a partial answer to the problem IV. Denote

$$V(l) := \int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx$$

when  $\mathcal{H}^1(\Sigma_{opt}) = l$ .

**Theorem 5** *Let  $N > 1$ . Then*

$$c \leq V(l)l^{1/(N-1)} \leq C$$

*for some positive constants  $c$  and  $C$  which depend only on  $N$  and  $\Omega$ .*

**Proof.** The proof will be achieved in two steps.

STEP 1. To prove the lower estimate, we need the following lemma.

**Lemma 3** *Let  $N > 1$  and  $Q \subset \mathbf{R}^N$  be a cube. Suppose that  $Q$  is divided by a uniform grid parallel to the edges into small subcubes with the side  $\varepsilon > 0$ . Let  $\Sigma \subset \mathbf{R}^N$  be a Lipschitz curve of length  $l$  and  $k$  be the number of subcubes which have nonempty intersection with  $\Sigma$ . Then one has*

$$k \leq c_1 l / \varepsilon + c_2$$

for some positive constants  $c_1$  and  $c_2$  which do not depend on  $\varepsilon$  and  $l$ .

Let  $Q \subset \Omega$  be a cube. Divide  $Q$  by a uniform grid into small subcubes with the side  $\varepsilon > 0$  (a dyadic decomposition is a particular example). Without loss of generality we may consider  $\Sigma_{opt}$  to be parametrized as a Lipschitz curve of length at most  $2l$ . Then

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq \int_Q \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx$$

The latter integral is estimated as follows. For each of the subcubes  $Q_\varepsilon \subset Q$  which do not intersect  $\Sigma_{opt}$  one has

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx &\geq \int_{\alpha Q_\varepsilon} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq \\ &\mathcal{L}^N(\alpha Q_\varepsilon)(1 - \alpha)\varepsilon = \mathcal{L}^N(Q_\varepsilon)\alpha^N(1 - \alpha)\varepsilon \end{aligned}$$

for all  $\alpha \in [0, 1]$ . Hence, maximizing the last expression in  $\alpha$ , one gets

$$\int_{Q_\varepsilon} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq C\varepsilon^{N+1}$$

for some  $C > 0$ . Let  $k'$  be a number of subcubes  $Q_\varepsilon$  not intersecting  $\Sigma_{opt}$ . Then

$$\int_Q \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq Ck'\varepsilon^{N+1}.$$

Using the estimate from the lemma 3 and the fact that the total number of subcubes is  $C\varepsilon^{-N}$ , we arrive therefore at the estimate

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq \int_Q \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq c_1\varepsilon - c_2\varepsilon^N l - c_3\varepsilon^{N+1}$$

for some positive constants  $c_1$ ,  $c_2$  and  $c_3$  independent of  $l$  and  $\varepsilon$ . Since the latter estimate is valid for all  $\varepsilon > 0$ , we may plug in  $\varepsilon := Cl^{1/(1-N)}$  for some positive constant  $C$ , which is at the moment unknown. We see then that with the choice  $0 < C < (c_1/c_2)^{1/(N-1)}$  the latter estimate becomes the desired lower bound

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, \Sigma_{opt}) dx \geq cl^{1/(1-N)}$$

for some  $c > 0$  and for sufficiently large  $l$ .

STEP 2. The upper estimate will immediately follow from the construction of a particular  $\Sigma$  with  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq Cl$  and such that

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma) dx \leq Cl^{1/(1-N)}, \quad (5.13)$$

where  $C$  denotes a positive constant different in different occasions. For this purpose consider a  $(N-1)$ -dimensional hyperplane  $\pi$  intersecting  $\Omega$  by some open set  $T$ . Consider a uniform grid in  $T$  parallel to the coordinate axes in the hyperplane, with the size of a cell equal to  $\varepsilon$ . Clearly, the total length of this grid is less or equal than  $C/\varepsilon$ . Let  $\Sigma$  stand for the union of this grid with all the line segments perpendicular to  $\pi$ , passing through the nodes of  $T$  and staying in  $\Omega$ . Since the total length of all such line segments is bounded from above by  $C/\varepsilon^{N-1}$ , for small  $\varepsilon$  we have  $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leq C/\varepsilon^{N-1}$ . Since now by construction  $\text{dist}(x, \Sigma) \leq C\varepsilon$  for all  $x \in \bar{\Omega}$ , where  $C$  is independent of  $x$ , then

$$\int_{\bar{\Omega}} \text{dist}(x, \Sigma) dx \leq C\varepsilon.$$

The estimate (5.13) follows now by setting  $l := 1/\varepsilon^{N-1}$ .  $\square$

PROOF OF THE LEMMA 3: Note that to connect a union of  $2^N + 1$  cubes one needs a curve of length at least  $\varepsilon$ . In fact, in such a union there are two cubes, the distance between which is not less than this number (equal in case of the union of adjacent cubes). Therefore, since the curve of length  $l$  connects  $k$  cubes, one has

$$l \geq [k/(2^N + 1)]\varepsilon,$$

where  $[\cdot]$  stands for the integer part of the number. The above estimate shows the statement.  $\square$





## Troisième partie

# Résultats d'analyse non harmonique



## Chapitre 6

# Observabilité d'un secteur angulaire sous condition de type Neumann

### 6.1 Introduction

En 1997, V. Komornik établit dans [53] un théorème de stabilisation frontière rapide sous une forme très générale. Grâce à ce théorème et à l'utilisation d'inégalités d'observabilité, il établit des théorèmes de stabilisation arbitrairement rapide pour de nombreux systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles (voir [52] et les références qu'il contient).

Malheureusement, dans le cas de l'équation des ondes avec condition au bord de Neumann les inégalités d'observabilité nécessaires pour pouvoir appliquer cette méthode ne sont connues que dans le cas de la boule. On suspectait alors que ces résultats de stabilisation n'étaient vrais que pour cet ouvert particulier. Nous nous proposons dans cette partie d'appliquer la méthode de V. Komornik à une autre famille d'ouverts : les secteurs angulaires. Quoique le traitement de ce cas particulier soit de lui-même satisfaisant, l'intérêt premier de ce travail est l'espoir qu'il suscite d'obtenir des résultats analogues pour des familles plus générales d'ouverts. Nous rappelons dans les premiers paragraphes les principaux outils de l'analyse non-harmonique que nous utilisons pour établir notre théorème de stabilisation.

### 6.2 Le théorème de Ingham et une méthode de A. Haraux

Le point de départ de l'étude qui suit est le théorème suivant dû à Ingham :

**Théorème 31** Soit  $\omega_0, \omega_1, \dots$  une suite de nombres réels vérifiant

$$\inf_{k \neq l} |\omega_k - \omega_l| \geq \alpha \quad (6.1)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel strictement positif. Soit  $I$  un intervalle borné, il existe  $c_1$  un réel positif, dépendant de  $I$ , telle que pour toute fonction

$$x(t) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t}$$

où  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes de carré sommable, on a l'estimation

$$\int_I |x(t)|^2 dt \leq c_1 \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2.$$

Soit  $I$  un intervalle de longueur strictement supérieur à  $2\pi/\alpha$ , il existe alors  $c_2 > 0$  telle que l'inégalité inverse

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \leq c_2 \int_I |x(t)|^2 dt$$

soit vérifiée.

Nous souhaitons par la suite appliquer ce type de théorème à des fonctions du type

$$x(t) = (\alpha + \beta t) e^{i\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t}, \quad (6.2)$$

ce pourquoi nous aurons besoin d'une généralisation du théorème 31 due à Haraux (cf. [38] pour le cas  $\beta = 0$ ). On trouvera un grand nombre d'autres généralisations du théorème 31 ainsi que leurs applications à la théorie du contrôle dans les références [6], [7], [45], [50], [51], [52], [54]. La démonstration que nous présentons ici a été proposée dans [49].

**Théorème 32** Soit  $\omega_0, \omega_1, \dots$  une suite de nombres réels vérifiant (6.1), soient  $c_0 > 0$  et  $I_0$  un intervalle borné tels que pour toute somme finie

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \text{ où } x_k \in \mathbb{C}, \text{ tous nuls sauf un nombre fini, } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (6.3)$$

on ait

$$\int_{I_0} |x(t)|^2 dt \leq c_0 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k(t)|^2 \quad (6.4)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq c_0 \int_{I_0} |x(t)|^2 dt. \quad (6.5)$$

Alors il existe  $c > 0$  tel que toute somme du type (6.2) à coefficients dans  $\ell^2$  vérifie

$$\int_I |x(t)|^2 dt \leq c(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2) \quad (6.6)$$

pour tout intervalle  $I$  borné. Si de plus  $I$  est de longueur strictement supérieure à celle de  $I_0$ , on a

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq c \int_I |x(t)|^2 dt. \quad (6.7)$$

**Remarque 33** La constante  $c > 0$  dans le théorème 32 dépend de l'intervalle  $I$  considéré.

**Démonstration** Nous étudions d'abord le cas des sommes finies pour ensuite généraliser nos résultats par densité.

• Commençons par démontrer (6.6). Remarquons dans un premier temps que l'inégalité (6.4) reste valable pour tout translaté  $I_0 + t_0$  de l'intervalle  $I_0$ . En effet en posant

$$y(t) := x(t + t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k e^{i\omega_k t_0}) e^{i\omega_k t},$$

on a par hypothèse

$$\int_{I_0+t_0} |x(t)|^2 dt = \int_{I_0} |y(t)|^2 dt \leq c_0 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k e^{i\omega_k t_0}|^2 = c_0 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2.$$

Nous allons à présent montrer que l'inégalité (6.6) reste valable pour les translatés de  $I_0$  :

$$\begin{aligned} \int_{I_0+t_0} |x(t)|^2 dt &\leq 3 \int_{I_0+t_0} |\alpha e^{i\omega_0 t_0}|^2 + |\beta t e^{i\omega_0 t_0}|^2 + \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \\ &\leq 3|I_0| |\alpha|^2 + 3 \int_{I_0+t_0} |\beta|^2 t^2 dt + 3c_0 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \end{aligned}$$

d'où (6.6) en posant  $c = 3 \max(|I_0|, \int_{I_0+t_0} t^2 dt, c_0)$ . Pour démontrer l'inégalité pour un intervalle quelconque, il suffit de remarquer que tout intervalle  $I$  peut être recouvert par un nombre fini de translatés  $I_1, I_2, \dots$ , de  $I_0$ . D'après ce qui précède,

$$\int_I |x(t)|^2 dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |x(t)|^2 dt \leq \sum_{j=1}^n c_j (|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2),$$

ce qui prouve (6.6) avec  $c = \sum_{j=1}^n c_j$ .

• Démonstration de (6.7) : Par un calcul analogue au précédent, on remarque que (6.5) reste valable pour tout intervalle obtenu par translation de  $I_0$ . En effet

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k e^{i\omega_k t_0}|^2 \leq c_0 \int_{I_0} |y(t)|^2 dt = c_0 \int_{I_0+t_0} |x(t)|^2 dt.$$

Soit  $I$  un intervalle de longueur  $|I|$  strictement supérieur à celle de  $I_0$ . Il existe alors un couple de réels  $(a, b)$  un intervalle de longueur  $|I_0|$  et  $\delta > 0$ , tels que

$$(a - \delta, b + \delta) \subset I.$$

Pour toute fonction  $x$  du type (6.2) on définit

$$y(t) := x(t) - \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\omega_0 s} x(t+s) ds.$$

Un calcul élémentaire donne

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\sin(\omega_k - \omega_0)\delta}{(\omega_k - \omega_0)\delta} \right] x_k e^{i\omega_k t} =: \sum_{k=1}^{\infty} y_k e^{i\omega_k t}.$$

Les fonctions  $y$  ainsi définies sont donc du type (6.3). D'après l'hypothèse de séparation (6.1), on a

$$\sqrt{\varepsilon} := \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \left[ 1 - \frac{\sin((\omega_k - \omega_0)\delta)}{(\omega_k - \omega_0)\delta} \right] > 0,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \leq c_1 \varepsilon^{-1} \int_a^b |y(t)|^2 dt. \quad (6.8)$$

On a de plus

$$\begin{aligned} |y(t)|^2 &\leq 2|x(t)|^2 + \frac{1}{2\delta^2} \left| \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\omega_0 s} x(t+s) ds \right|^2 \\ &\leq 2|x(t)|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |x(t+s)|^2 ds \\ &= 2|x(t)|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} |x(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |y(t)|^2 dt &\leq 2 \int_a^b |x(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta} \int_a^b \int_{t-\delta}^{t+\delta} |x(s)|^2 ds dt \\
 &= 2 \int_a^b |x(t)|^2 dt + \frac{1}{\delta} \int_{a-\delta}^{b+\delta} \int_{\max(a, s-\delta)}^{\min(b, s+\delta)} |x(s)|^2 ds dt \\
 &\leq 2 \int_a^b |x(t)|^2 dt + 2 \int_{a-\delta}^{b+\delta} |x(s)|^2 ds \\
 &\leq 4 \int_I |x(t)|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne avec (6.8), l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq 4c_1 \varepsilon^{-1} \int_I |x(t)|^2 dt. \quad (6.9)$$

Il nous reste à majorer les termes en  $\alpha$  et  $\beta$ ; utilisant (6.6) puis (6.9), on a

$$\begin{aligned}
 |\alpha|^2 + |\beta|^2 &\leq c_2 \int_I |\alpha + \beta t|^2 dt \\
 &\leq 2c_2 \int_I |x(t)|^2 dt + \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \\
 &\leq 2c_2 \int_I |x(t)|^2 dt + 2c_2 c_3 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \\
 &\leq (2c_2 + 8c_1 c_2 c_3 \varepsilon^{-1}) \int_I |x(t)|^2 dt.
 \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration du théorème avec  $c = 2c_2 + 8c_1 c_2 c_3 \varepsilon^{-1} + 4c_1 \varepsilon^{-1}$ .

• On généralise à présent notre étude aux sommes infinies : soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$ , montrons que la série (6.3) converge bien dans  $L^2(I)$ . Considérons pour cela les sommes partielles

$$s_n(t) := (\alpha + \beta t) e^{i\omega_0 t} + \sum_{k=1}^n x_k e^{i\omega_k t}, \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

Celles-ci forment une suite de Cauchy dans  $L^2(I)$ ; en effet

$$\|s_n - s_m\|_{L^2(I)} \leq c \sum_{k=m+1}^n |x_k|^2 \text{ pour } n > m.$$

Pour les sommes partielles on a, d'après ce qui précède,

$$\int_I |s_n(t)|^2 dt \leq c(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{k=1}^n |x_k|^2)$$

et

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq c \int_I |s_n(t)|^2 dt.$$

On conclut en passant à la limite.  $\square$

### 6.3 Étude des fonctions propres d'un secteur angulaire

Dans ce paragraphe nous considérons un secteur angulaire  $\Omega$  de rayon  $R$  et d'angle  $\alpha$  soit

$$\Omega = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \text{ avec } 0 < \theta < \alpha, 0 < r < R\}.$$

L'application de la méthode de Fourier demande de connaître les fonctions propres du laplacien-Neumann de  $\Omega$  ce que permet la

**Proposition 21** *Soit  $\Omega$  un secteur angulaire de rayon 1 et d'angle  $0 < \alpha < 2\pi$ . Définissons  $c_{\frac{m\pi}{\alpha}1} < c_{\frac{m\pi}{\alpha}2} < \dots$  la suite des racines strictement positives de  $J'_{\frac{m\pi}{\alpha}}(x)$ , la dérivée de la fonction de Bessel d'indice  $\frac{m\pi}{\alpha}$  et posons  $c_{00} = 0$ . Les fonctions définies en coordonnées polaires par*

$$J_0(c_{0k}r), \quad k = 0, 1, \dots$$

et

$$J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c_{\frac{m\pi}{\alpha}k}r) \cos(m\pi\theta/\alpha), \quad m, k = 1, 2, \dots$$

*forment une base orthonormée de  $L^2(\Omega)$ . De plus elles sont les fonctions propres du laplacien avec conditions de Neumann homogènes sur  $\partial\Omega$  associées respectivement aux valeurs propres  $c_{\frac{m\pi}{\alpha}k}^2$ .*

**Démonstration** • Montrons que ces fonctions sont fonctions propres de  $-\Delta$  avec conditions de Neumann homogènes sur  $\partial\Omega$ . Rappelons l'expression du laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Une fonction à variables séparées  $v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$  est solution de  $-\Delta v = \lambda v$  s'il existe une constante  $c$  telle que

$$-g''(\theta) = cg(\theta) \tag{6.10}$$

et

$$r^2(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r)) = cf(r). \tag{6.11}$$



De plus on doit avoir

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta) = 0 \text{ en } \theta = 0, \alpha \text{ pour } r \in [0, 1], \text{ et} \\ \frac{\partial v}{\partial r}(1, \theta) = 0 \text{ pour } \theta \in [0, \alpha]. \end{cases}$$

D'où les conditions au bord

$$f'(1) = 0 \tag{6.12}$$

et

$$g'(0) = g'(\alpha) = 0. \tag{6.13}$$

Le système (6.10), (6.13) impose

$$g(\theta) = a \cos(m\pi\theta/\alpha) \text{ avec } m = 0, 1, 2, \dots \text{ et } a \in \mathbb{C},$$

pour chacune de ces fonctions, la constante  $c$  est donnée par

$$c = \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2.$$

La constante  $c$  étant déterminée, le système (6.11), (6.12) nous permet d'identifier  $f$  et  $\lambda$  :  $f$  est colinéaire pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  à  $J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} r)$  où

- $J_{\frac{m\pi}{\alpha}}$  est la fonction de Bessel du premier ordre d'indice  $\frac{m\pi}{\alpha}$ ,
- $c \frac{m\pi}{\alpha} k$  est le  $k$ -ième zéro de  $J'_{\frac{m\pi}{\alpha}}$  (avec la convention  $c_{00} = 0$ ).

Les fonctions définies dans l'énoncé du théorème sont donc bien des fonctions propres de  $-\Delta$  avec conditions de Neumann homogène.

• Montrons à présent que l'ensemble de ces fonctions forme un système complet de  $L^2(\Omega)$ . Pour ce faire, montrons que toute fonction propre est limite (au sens de  $L^2(\Omega)$ ) de combinaisons linéaires de fonctions propres. Soit  $u \in C^\infty(\Omega)$ , solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour un certain réel positif  $\lambda$ . Pour  $r \in ]0, 1[$  fixé,  $u(r, \cdot) \in C^\infty([0, \alpha])$  par régularité elliptique. On a de plus

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \alpha) = 0.$$

Ainsi  $u(r, \cdot)$  peut se prolonger par parité en une fonction de  $C^1([-\alpha, \alpha])$  puis en une fonction  $2\alpha$ -périodique de  $C^1(\mathbb{R})$ . D'après le théorème de Dirichlet et la parité de  $u(r, \cdot)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \cdot)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \cdot)$ , les séries de Fourier

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha u(r, \theta) d\theta + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha} \left( \int_0^\alpha u(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \right) \cos(m\pi\theta/\alpha),$$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) d\theta + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha} \left( \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \right) \cos(m\pi\theta/\alpha)$$

et

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) d\theta + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha} \left( \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \right) \cos(m\pi\theta/\alpha)$$

convergent normalement sur  $[0, \alpha]$  vers  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \cdot)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \cdot)$  respectivement. On a aussi convergence simple (notre prolongement de  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \cdot)$  appartenant à l'espace de Dirichlet) de

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) d\theta + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{\alpha} \left( \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \right) \cos(m\pi\theta/\alpha)$$

vers  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta)$  sur  $]0, \alpha[$ . L'identité

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega,$$

se traduit, en termes de coefficients des séries de Fourier, par la relation

$$\begin{aligned} r^2 \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta + r \int_0^\alpha \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \\ + \int_0^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta = -\lambda r^2 \int_0^\alpha u(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta \end{aligned}$$

pour  $r \in ]0, 1[$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Ce qui donne après une double intégration par parties de l'avant-dernière intégrale,

$$r^2 f_m''(r) + r f_m'(r) + (\lambda r^2 - (m\pi/\alpha)^2) f_m(r) = 0 \quad (6.14)$$

pour  $r \in ]0, 1[$  et  $m \in \mathbb{N}$ , où l'on a posé

$$f_m(r) := \int_0^\alpha u(r, \theta) \cos(m\pi\theta/\alpha) d\theta.$$

D'après la condition au bord  $\frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = 0$  sur  $]0, \alpha[$ , on a de plus

$$f_m'(1) = 1 \text{ pour } m \in \mathbb{N}. \quad (6.15)$$

L'équation de Bessel (6.14) confrontée à (6.15), permet d'écrire pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et pour un entier  $k \in \mathbb{N}$  (non nul pour  $m \neq 0$ )

$$f_m(r) = a_m J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c_{\frac{m\pi}{\alpha}} k r)$$

où  $a_m$  est une constante et les coefficients  $c_{\frac{m\pi}{\alpha}} k$  sont définis dans le théorème. Ainsi nous avons montré

$$u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c_{\frac{m\pi}{\alpha}} k r) \cos(m\pi\theta/\alpha).$$

Cette série converge simplement pour  $r \in ]0, 1[$  et  $\theta \in ]0, \alpha[$ . On montre sans difficultés que cette dernière converge aussi dans  $L^2(\Omega)$ . La complétude de notre système de fonctions propres s'en déduit.  $\square$

## 6.4 Une méthode de stabilisation rapide

Nous rappelons dans ce paragraphe le théorème de stabilisation rapide de V. Komornik publié dans [53], formulé dans le cadre général suivant :

Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé de domaine  $D(A)$  inclus dans un espace de Hilbert  $H$  et  $B$  un opérateur linéaire borné d'un autre espace de Hilbert  $G$  dans  $D(A^*)'$  (où  $A^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $A$ ). On s'intéresse au problème d'évolution abstrait

$$x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in H. \quad (6.16)$$

Le problème dual associé s'écrit

$$\varphi' = -A^* \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in D(A^*), \quad \psi = B^* \varphi. \quad (6.17)$$

Nous supposons les hypothèses suivantes satisfaites :

(H1) L'opérateur  $A^*$  engendre un groupe  $e^{sA^*}$  dans  $H'$ ,

(H2)  $D(A^*) = D(B^*)$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  tels que

$$\|B^* \Phi\| \leq c \|(A + \lambda I)^* \Phi\|$$

pour tout  $\Phi \in D(A^*)$ ,

(H3) Il existe deux constantes  $T'$  et  $c'$  telles que

$$\|\psi\|_{L^2(0, T'; G')} \leq c' \|\varphi_0\|_{H'}$$

pour tout  $\varphi_0 \in D(A^*)$ .

(H4) Il existe deux constantes positives  $T$  et  $c$  telles que

$$\|\varphi_0\|_{H'} \leq c \|\psi\|_{L^2(0, T; G')}$$

pour tout  $\varphi_0 \in D(A^*)$ .

**Remarque 34** – L'hypothèse (H1) est classique et habituellement vérifiée dans les problèmes à temps réversible,

- l'hypothèse (H2) est dans le cas qui nous intéresse, une conséquence de la régularité elliptique,
- les hypothèses (H3) et (H4) ne sont autres que les inégalités appelées inégalité directe et inverse dans la terminologie HUM de J.-L. Lions.

Étudions à présent le caractère bien posé des systèmes (6.16) et (6.17). Sous l'hypothèse (H1), pour tout  $\varphi_0 \in D(A^*)$  le système (6.17), admet une unique solution

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}; H') \cap C(\mathbb{R}; D(A^*))$$

(voir par exemple [66]). Soit  $x_0 \in H$  et  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; G)$ , fixés. Après multiplication de l'équation (6.16) par la solution  $\varphi$  de (6.17) et intégration par parties formelle, nous obtenons la relation

$$(x(T), \varphi(T))_{H, H'} = (x_0, \varphi_0)_{H, H'} + \int_0^T (u(s), \psi(s))_{G, G'} ds \quad (6.18)$$

On *définit* alors une solution de (6.16), comme une fonction continue  $x : \mathbb{R} \rightarrow H$ , vérifiant (6.18) pour tout  $\varphi_0 \in H'$  et pour tout  $T \in \mathbb{R}$ . On trouvera, toujours dans [52], le lemme suivant qui justifie notre définition :

**Lemme 12** *Pour tout  $x_0 \in H$  et  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; G)$  fixés, le problème (6.16) possède une unique solution. Pour tout  $T > 0$ , il existe de plus  $c_T > 0$  telle que*

$$\|x\|_{L^\infty(-T, T; H)} \leq c_T (\|x_0\|_H + \|u\|_{L^2(-T, T; G)}).$$

Avant de pouvoir énoncer le théorème de stabilisation abstrait qui nous intéresse, nous allons construire explicitement un opérateur de contrôle.

Pour tout  $\omega > 0$  et  $T > 0$ , posons  $T_\omega := T + \frac{1}{2\omega}$  et considérons la fonction  $e_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , définie par

$$e_\omega(s) := \begin{cases} e^{-2\omega s} & \text{pour } 0 \leq s \leq T, \\ 2\omega e^{-2\omega s} (T_\omega - s) & \text{pour } T \leq s \leq T_\omega. \end{cases}$$

Soit  $J : G' \rightarrow G$  l'isomorphisme canonique de Riesz. D'après les hypothèses (H1)-(H4), la formule

$$(\Lambda_\omega \varphi_0, \psi_0)_{H, H'} := \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) (JB^* e^{-sA^*} \varphi_0, B^* e^{-sA^*} \psi_0)_{G, G'} ds,$$

définit un isomorphisme auto-adjoint  $\Lambda_\omega \in L(H', H)$  défini positif. De plus la relation

$$\|x\|_\omega := (\Lambda_\omega^{-1} x, x)_{H, H'}^{1/2}$$

définit une norme équivalente sur  $H$ . Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de ce paragraphe :

**Théorème 35** *Supposons les hypothèses (H1)-(H4) satisfaites pour un certain  $T > 0$ . Soit  $\omega > 0$  fixé, posons*

$$F = -JB^* \Lambda_\omega^{-1}. \quad (6.19)$$

Alors le problème

$$x' = Ax + BFx, \quad x(0) = x_0 \quad (6.20)$$

admet une solution qui vérifie

$$\|x(t)\|_\omega \leq \|x_0\|_\omega e^{-\omega t} \text{ pour tout } t > 0. \quad (6.21)$$

**Remarque 36** Pour voir en quel sens (6.20) est un problème bien posé, on consultera [31] pages 99-100.

**Démonstration** Nous nous contentons ici, de reproduire la preuve formelle publiée dans [52]. Supposons les espaces de Hilbert considérés de dimensions finies; les opérations qui suivent sont alors de simples manipulations matricielles. On peut décrire  $\Lambda_\omega$  de manière plus explicite par la formule

$$\Lambda_\omega : = \int_0^{T_\omega} e^{\omega(s)} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} ds.$$

Soit  $x_0 \in H$  et  $x$  une solution du système formé par (6.19) et (6.20). Par un calcul direct ( $\Lambda_\omega$  étant auto-adjoint,  $\Lambda_\omega^{-1}$  l'est aussi), on a

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_\omega^{-1}x, x)_{H, H'} = (\Lambda_\omega^{-1}x, (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A - 2BJB^*)\Lambda_\omega^{-1}x)_{H, H'}. \quad (6.22)$$

Or on a

$$\begin{aligned} BJB^* &= - \int_0^{T_\omega} \frac{d}{ds} (e^{\omega(s)} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}) ds = A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A + 2\omega\Lambda_\omega \\ &\quad + \int_T^{T_\omega} (2\omega e^{-2\omega T} - 2\omega e^{-2\omega s}) e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} ds \end{aligned}$$

Puisque  $2\omega e^{-2\omega T} - 2\omega e^{-2\omega s} \geq 0$  sur  $[T, T_\omega]$ , l'opérateur

$$-2\omega\Lambda_\omega - A\Lambda_\omega - \Lambda_\omega A + BJB^*$$

est un opérateur positif. A fortiori, l'opérateur

$$-2\omega\Lambda_\omega - A\Lambda_\omega - \Lambda_\omega A + 2BJB^*$$

aussi. On a donc d'après (6.22) l'inégalité

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_\omega^{-1}x, x)_{H, H'} \leq -2\omega(\Lambda_\omega^{-1}x, x)_{H, H'}.$$

De cette estimation, nous déduisons

$$\|x(t)\|_\omega^2 \leq \|x_0\|_\omega^2 e^{-2\omega t}$$

pour tout  $t \geq 0$ , d'où (6.21).  $\square$

## 6.5 Résultat d'observabilité pour l'équation des ondes

Soit  $\Omega$  un secteur angulaire d'ouverture  $\alpha$  et de rayon  $R$ . On s'intéresse aux solutions de l'équation des ondes

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.23)$$

Nous rappelons le théorème d'existence classique (voir par exemple [72]) :

**Théorème 37** *Pour  $y_0 \in H_0^1(\Omega)$  et  $y_1 \in L^2(\Omega)$ , le problème (6.23) admet une unique solution*

$$y \in C(\mathbb{R}; H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega)).$$

Dans ce qui suit  $\Gamma$  désigne l'arc de cercle frontière de notre secteur angulaire. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant :

**Théorème 38** *Soit  $\Omega$  un secteur angulaire d'ouverture  $\alpha$  et de rayon  $R$ ,  $u$  la solution de (6.23) et*

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y_0|^2 + |y_1|^2 dx$$

*son énergie initiale. Alors :*

- a) *Pour tout intervalle  $I$  de longueur  $|I| > 2R$ , il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant que de  $|I|$  telle que pour toutes données initiales*

$$E \leq c \int_I \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma dt.$$

- b) *L'inégalité*

$$\int_I \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma dt \leq cE$$

*n'est vraie pour aucun  $c > 0$  et aucun intervalle  $I$ .*

Nous aurons besoin des lemmes suivants dont on trouvera la démonstration dans [49].

**Lemme 13** *Soient  $(c_{\frac{m\pi}{\alpha}k})_{k \geq 1}$  la suite des zéros de  $J'_{\frac{m\pi}{\alpha}}$  où  $0 < \alpha < 2\pi$  et  $m = 0, 1, \dots$ . On a*

$$a) \left| c_{\frac{m\pi}{\alpha}k} - c_{\frac{m\pi}{\alpha}l} \right| > \pi \text{ pour } k \neq l,$$

$$b) c_{\frac{m\pi}{\alpha}1}/m \rightarrow \pi/\alpha \text{ quand } m \rightarrow +\infty,$$

c)  $c \frac{m\pi}{\alpha} > \pi/2$  pour  $m = 0, 1, \dots$

**Lemme 14** Pour tout  $m = 0, 1, \dots$  et pour tout  $c > 0$ , on a

$$2c^2 \int_0^1 r |J_m(cr)|^2 dr = c^2 |J'_m(c)|^2 + (c^2 - m^2) |J_m(c)|^2.$$

**Démonstration** La forme générale d'une solution de (6.23) est donnée par

$$y(t, r, \theta) = \alpha + \beta t + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \cos(m\pi\theta/\alpha) (\alpha_{mk} e^{ic_{mk}t} + \beta_{mk} e^{-ic_{mk}t})$$

où  $\alpha, \beta, \alpha_{mk}, \beta_{mk}$  sont des nombres complexes déterminés par les conditions initiales. En utilisant l'orthogonalité des fonctions  $\cos(m\pi\theta/\alpha)$  sur  $(0, \pi/\alpha)$ , nous pouvons calculer l'énergie initiale

$$\begin{aligned} 2E &= \left\| \alpha + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \cos(m\pi\theta/\alpha) (\alpha_{mk} + \beta_{mk}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\| \beta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \cos(m\pi\theta/\alpha) (\alpha_{mk} - \beta_{mk}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \pi |\alpha|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 r \left| J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \right|^2 dr \int_0^\alpha |(\alpha_{mk} + \beta_{mk}) \cos(m\pi\theta/\alpha)|^2 d\theta \\ &\quad + \pi |\beta|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 r \left| J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \right|^2 dr \int_0^\alpha |(\alpha_{mk} - \beta_{mk}) \cos(m\pi\theta/\alpha)|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Ce qui donne d'après le lemme 14

$$\begin{aligned} 2E &= \pi(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (m\pi/\alpha c_{mk})^2) \left| J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \right|^2 \\ &\quad * (|\alpha_{mk}|^2 + |\beta_{mk}|^2) \int_0^\alpha \cos^2(m\pi\theta/\alpha) d\theta. \end{aligned}$$

D'autre part, toujours par orthogonalité des  $\cos(m\pi\theta/\alpha)$ , l'intégrale de bord vaut

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma &= \int_0^\alpha \left| \alpha + \beta t + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(c_{0k}) (\alpha_{0k} e^{ic_{0k}t} + \beta_{0k} e^{-ic_{0k}t}) \right|^2 d\theta + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\alpha \left| \sum_{k=1}^{\infty} J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k) \cos(m\pi\theta/\alpha) (\alpha_{mk} e^{ic_{mk}t} + \beta_{mk} e^{-ic_{mk}t}) \right|^2 d\theta \\ &= : \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\alpha |f_m(t, \theta)|^2 d\theta \end{aligned}$$

d'où

$$\int_I \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_I |f_m(t, \theta)|^2 dt d\theta.$$

En appliquant à l'aide du lemme 13 le théorème d'Ingham avec  $|I| > 2$ ,  $\gamma = \pi$  et la méthode de Haraux, on obtient

$$\int_I \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma dt \sim c(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| J_{\frac{m\pi}{\alpha}}(c \frac{m\pi}{\alpha} k r) \right|^2 (|\alpha_{mk}|^2 + |\beta_{mk}|^2) \int_0^{\alpha} |\cos(m\pi\theta/\alpha)|^2 d\theta)$$

d'où le résultat d'observabilité a) et le corollaire.

L'impossibilité de l'inégalité directe s'obtient en constatant toujours d'après le lemme (13) b) que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - (m\pi/\alpha c \frac{m\pi}{\alpha} k)^2 = 0.$$

□

**Remarque 39** – *Nous venons de voir qu'il est nécessaire d'observer la solution sur le bord strictement convexe pendant un temps  $T > 2R$ .*

- *Aucune observation sur les parties droites n'est nécessaire.*
- *Le temps d'observation nécessaire ne dépend pas de l'ouverture du secteur angulaire.*
- *Des conditions mixtes se traitent de la même manière.*

On remarque qu'une autre conséquence de notre démonstration est

**Corollaire 4** *Soit  $I$  un intervalle et pour tout  $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  posons*

$$\|(y_0, y_1)\|_I := \int_I \int_{\Gamma} |y|^2 d\Gamma dt$$

*où  $y$  est solution de (6.23). Si  $I$  est de longueur strictement supérieure à  $2R$ , la fonction  $\|\cdot\|_I$  définit une norme sur l'espace des conditions initiales  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . De plus, ces normes sont équivalentes pour tout intervalle de longueur strictement supérieure à  $2R$ .*

## 6.6 Stabilisation d'un secteur angulaire

Afin de pouvoir appliquer le théorème 35, nous allons définir le cadre abstrait dans lequel se situe la stabilisation frontière du système d'équations

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u \text{ sur } \mathbb{R} \times \Gamma, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times (\partial\Omega \setminus \Gamma), \\ y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = y_1 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (6.24)$$



où  $\Omega$  est un secteur angulaire d'ouverture  $2\pi > \alpha > 0$  et de rayon  $R$  (comme dans le paragraphe précédent  $\Gamma$  désigne ici la partie circulaire de  $\partial\Omega$ ). Après quoi nous vérifierons que les conditions (H1)-(H4) sont bien satisfaites.

D'après le théorème 38, pour tout  $T > 2R$ , l'application

$$(\xi_0, \xi_1) \mapsto \|\xi\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))},$$

où  $\xi$  est solution de

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta\xi = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ \xi(0) = \xi_0 \text{ et } \xi'(0) = \xi_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.25)$$

définit une norme sur  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Ces normes étant de plus équivalentes pour tout  $T > 2R$ . Considérons le complété  $H'$  de  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  pour une de ces normes et posons  $H = H''$ . Remarquons que d'après le théorème III.1.6 page 167 de [60], on a les inclusions

$$H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset H' \subset L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))',$$

d'où

$$L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \subset H \subset (H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega).$$

Par commodité nous utiliserons la notation suivante :

$$\mathcal{H} : = \{(y_0, y_1) \text{ tels que } (y_1, y_0) \in H\}.$$

Considérons à présent le problème

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta\xi = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial\xi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ \xi(0) = \xi_0 \text{ et } \xi'(0) = \xi_1 \text{ dans } \Omega, \\ \psi = \xi|_{\Gamma} \text{ sur } \mathbb{R} \times \Gamma. \end{cases}$$

Posons  $\varphi = (\xi, \xi')$  et  $\varphi = (\xi_0, \xi_1)$  et définissons les opérateurs  $A^*$  et  $B^*$  par

$$\begin{aligned} D(A^*) &= D(B^*) = \{\eta_0 \in H^2(\Omega) \mid \partial_\nu \eta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \times H^1(\Omega), \\ A^*(\eta_0, \eta_1) &= -(\eta_1, \Delta\eta_0), \\ B^*(\eta_0, \eta_1) &= -\eta_0|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

•Vérifions l'hypothèse (H1) : pour montrer que  $A^*$  engendre un groupe fortement continu dans  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , nous allons appliquer le théorème de Hille-Yosida (voir [12]). Il s'agit d'abord de voir que  $A^* + I$  est monotone; soit  $\eta \in D(A^*)$ , on a

$$\begin{aligned} (A^*\eta, \eta)_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + (\eta, \eta)_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} &= -\int_{\Omega} \nabla \eta_0 \nabla \eta_1 - \int_{\Omega} \eta_0 \eta_1 \\ &+ \int_{\Omega} (-\Delta\eta_0) \eta_1 + \int_{\Omega} |\nabla \eta_0|^2 + \int_{\Omega} \eta_0^2 + \int_{\Omega} \eta_1^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \eta_0|^2 + \int_{\Omega} \eta_0^2 + \int_{\Omega} \eta_1^2 - \int_{\Omega} \eta_0 \eta_1 \end{aligned}$$

qui est bien positif. Il reste à vérifier que  $A^* + I$  est maximal monotone. Pour cela montrons que  $A^* + 2I$  est maximal monotone : soit  $F = (f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  : on doit résoudre  $A^*\eta + 2\eta = F$ , c'est à dire le système

$$\begin{cases} -\eta_1 + 2\eta_0 = f & \text{dans } \Omega \\ -\Delta\eta_0 + 2\eta_1 = g & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (6.26)$$

avec  $\eta \in D(A^*)$ . On déduit de (6.26) que

$$-\Delta\eta_0 + 4\eta_0 = 2f + g.$$

On observe que cette dernière équation admet bien une unique solution (voir par exemple [72] page 45) appartenant à  $\{\eta_0 \in H^2(\Omega) \mid \partial_\nu \eta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  (la régularité  $H^2(\Omega)$  provenant de la convexité d'un secteur angulaire). En posant  $\eta_1 = 2\eta_0 - f \in H^1(\Omega)$ , on définit bien une solution de (6.26)  $\eta = (\eta_0, \eta_1) \in D(A^*)$ . D'après le théorème 38,  $A^*$  engendre aussi un groupe fortement continu dans  $H'$ .

• Posons  $G = L^2(\Gamma) = L^2(\Gamma)'$ . On a, par définition de  $D(B^*)$  et la régularité elliptique (voir par exemple [12] page 182),

$$\begin{aligned} D(A^*) &= D(B^*) = \{\eta_0 \in H^2(\Omega) \mid \partial_\nu \eta_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \times H^1(\Omega) \text{ et} \\ \|B^*(\eta_0, \eta_1)\|_{G'} &= \|\eta_0\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|\eta_0\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\Delta\eta_0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|-(\eta_1, \Delta\eta_0)\|_{H'} = \|A^*(\eta_0, \eta_1)\|_{H'}, \end{aligned}$$

d'où l'hypothèse (H2).

• Finalement, il est clair que (H3) et (H4) sont satisfaites par définition de  $H'$ . Les hypothèses du théorème 35 sont donc bien vérifiées dans notre cadre fonctionnel en posant  $A := A^{**}$  et  $B = B^{**}$ . Avant de conclure, traduisons dans le cadre qui nous intéresse le problème de contrôle que nous venons de résoudre ; nous avons montré l'existence d'une solution pour le problème (6.18). Dans ce cadre fonctionnel où  $x = (y', -y)$ ,  $x_0 = (y_1, -y_0)$ ,  $\varphi = (\xi, \xi')$  et  $\varphi = (\xi_0, \xi_1)$ , cette formulation s'écrit

$$\left[ \int_{\Omega} y' \xi - y \xi' dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} -u \xi d\sigma dt = 0.$$

**Remarque 40** Cette relation se retrouve formellement en écrivant pour  $y, \xi$  solutions de (6.24) et (6.25) ;

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Gamma} (y'' - \Delta y) \xi dx dt \\ &= \left[ \int_{\Omega} y' \xi - y \xi' dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} y (\xi'' - \Delta \xi) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} -(\partial_\nu y) \xi + (\partial_\nu \xi) y d\sigma dt \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent énoncer

**Théorème 41** *Soit  $\Omega$  un secteur angulaire,  $\omega > 0$  un réel arbitrairement grand fixé, il existe un opérateur linéaire borné*

$$\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)$$

*et une constante  $M$ , tels que si*

$$u = \mathcal{F}(y, y'), \tag{6.27}$$

*le problème (6.24), (6.27) est bien posé dans  $\mathcal{H}$ , et sa solution vérifie*

$$\|(y, y')(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M \|(y_0, y_1)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}$$

*pour tout  $t \geq 0$  et tout couple  $(y_0, y_1) \in \mathcal{H}$ .*



## Chapitre 7

# Monotonie des zéros des dérivées des fonctions de Bessel

L'analyse non harmonique, dans l'étude de la contrôlabilité exacte des équations à temps réversible (typiquement l'équation des ondes), a apporté ces dernières années des résultats plus fins (seulement pour certains ouverts) que la méthode classique des multiplicateurs. Pour ce faire il est nécessaire d'avoir des informations précises sur les valeurs propres de l'ouvert considéré. C'est dans cet esprit que j'ai obtenu le théorème qui suit.

### 7.1 Rappels et notations

Soit  $\nu \in \mathbb{R}$ .

**Définition 6** On appelle fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  une solution non triviale de l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \text{ sur } (0, \infty). \quad (7.1)$$

Nous étudions ici la suite des zéros des fonctions de Bessel ainsi que ceux de leurs dérivées. Nous rappelons que pour tout paramètre réel  $\nu$ , la fonction de Bessel  $J_\nu(x)$  possède un nombre dénombrable de zéros simples  $(j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\pi$ . Dans [69] Porter prouve le résultat de monotonie suivant :

**Théorème 42** Soit  $J_\nu$  une fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  et  $(j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de ses zéros. On est dans l'un des cas suivants :

- (a)  $|\nu| > 1/2$ , alors la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- (b)  $|\nu| < 1/2$ , la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- (c)  $|\nu| = 1/2$ , la suite  $(j_{\nu n+1} - j_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

La question étudiée dans cette partie est la suivante : peut-on obtenir des résultats de monotonie analogues pour les dérivées des fonctions de Bessel? Introduisons pour cela une notion de monotonie partielle :

**Définition 7** *Nous dirons d'une suite qu'elle est essentiellement monotone si elle est monotone à partir d'un certain rang.*

Dans [51], V.Komornik prouve un résultat de monotonie partielle pour des combinaisons du type  $u = kJ_\nu + lxJ'_\nu$  où  $(k, l)$  est un couple de réels fixé différent du couple nul. Cette étude a pour corollaire la proposition suivante :

**Proposition 22** *Soit  $\nu \in \mathbb{R}$  et  $(j'_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des zéros de  $J'_\nu$ . La suite  $(j'_{\nu n} - j'_{\nu n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante.*

Qu'en est-il pour les dérivées d'ordre supérieur?

## 7.2 Etude de la suite des zéros des dérivées de fonction de Bessel

### 7.2.1 Le théorème de monotonie de Komornik

Notre étude repose sur un lemme de factorisation utilisé dans [51] que nous rappelons :

**Lemme 15** *Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^3$ . Soit  $u$  solution sur  $I$  de l'équation différentielle :*

$$(gu)'' + fgu = 0.$$

*Supposons que  $g$  et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  ne s'annulent pas sur  $I$ . On définit les fonctions  $G, H : I \rightarrow \mathbb{R}$  par les relations :*

$$\begin{aligned} G &= |g^3/h|^{1/2}, \\ F &= f + (3g''/g) - 2(g'/g)(h'/h) - (G''/G). \end{aligned}$$

*Alors  $G$  ne s'annule pas sur  $I$  et l'on a :*

$$(Gu')'' + FG u' = 0.$$

C'est à l'aide de ce Lemme que V.Komornik établit dans [51] la proposition 22. La démonstration de cette proposition se fait en deux étapes :

- (1) On identifie une équation différentielle d'ordre 2 sans terme d'ordre 1 vérifiée par  $u'$ .

- (2) On applique le théorème de monotonie de Sturm ou plutôt son corollaire (voir par exemple [51]) que nous rappelons ci-dessous :

**Théorème 43 (Sturm, 1836)** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues vérifiant  $q_1 \leq q_2$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux fonctions de  $C^1(I)$  non nulles telles que :*

$$y_1''(t) + q_1(t)y_1(t) = 0 \text{ et } y_2''(t) + q_2(t)y_2(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

*Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux zéros consécutifs de  $y_1$ , alors  $y_2$  s'annule sur  $[\alpha, \beta]$ .*

**Corollaire 5** *Soit  $y \in C^1((0, \infty))$  une solution non triviale de*

$$y''(t) + q(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in (0, \infty)$$

*où  $q$  est une fonction continue monotone sur  $(0, \infty)$ . Alors les zéros de  $y$  sur  $(0, +\infty)$  forment une suite dénombrable  $t_1 < t_2 \dots$  et la suite des différences  $(t_{n+1} - t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante (respectivement décroissante) si  $q$  est décroissante (respectivement croissante).*

Ceci nous suggère un procédé récursif: en effet, si nous sommes capables d'une part de déterminer pour toute dérivée de fonction de Bessel une équation différentielle d'ordre 2 (sans terme d'ordre 1) dont elle (ou une fonction qui a les mêmes zéros qu'elle) est la solution, et d'autre part d'étudier la monotonie des fonctions apparaissant dans cette équation nous serons en mesure de conclure quant à la monotonie essentielle de la différence de ses zéros.

### 7.2.2 Généralisation à des dérivées d'ordre supérieur

Nous appliquons dans cette section le procédé décrit plus haut afin d'étudier les zéros des fonctions qui s'écrivent :

$$u_{\alpha, \nu, l}(x) = \frac{d^l}{dx^l} (x^\alpha J_\nu(x)),$$

où  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < 0$  et  $l \in \mathbb{N}$ . Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :

**Théorème 44** *Pour tout  $\alpha < 0$  et  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $|\nu| > 1/2$ , la fonction  $u_{\alpha, \nu, l}$  possède une suite dénombrable de zéros  $(j_{\nu n}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence  $(j_{\nu n}^l - j_{\nu n+1}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante.*

**Démonstration** Soit  $(j_{\nu n}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des zéros de  $u_{\alpha, \nu, l}$ . Nous aurons besoin de la définition suivante :

**Définition 8** *Soit  $a > 0$ , et  $f : (a, \infty)$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Nous dirons que  $f$  est du type  $1/x$  si :*

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \infty} x^j f^{(j)}(x) = 0,$$

*où  $f^{(j)}$  est la dérivée d'ordre  $j$  de  $f$ .*

• Comme nous l'avons annoncé, nous souhaitons dans un premier temps trouver une équation d'ordre 2 sans terme d'ordre 1, vérifiée par  $u_{\alpha,\nu,l}$ . Nous remarquons pour commencer que, puisque  $J_\nu$  vérifie (7.1), elle vérifie aussi l'équation factorisée :

$$\left(x^{1/2}y\right)'' + \left(1 - (\nu^2 - 1/4)/x^2\right) \left(x^{1/2}y\right) = 0 \text{ sur } (0, \infty).$$

La fonction  $y = x^\alpha J_\nu(x)$  vérifie donc une équation du type de celle du lemme 15 où :

- $f(x) = (1 - (\nu^2 - 1/4)/x^2)$  et
- $g(x) = x^{1/2-\alpha}$ .

A l'aide du Lemme 15 comme nous l'avons rappelé ci-dessus, V.Komornik montre la monotonie essentielle cherchée pour les fonctions du type  $u_{\alpha,\nu,1}$ . Nous souhaitons à présent appliquer cette méthode  $l$  fois afin d'obtenir des renseignements sur les zéros de  $u_{\alpha,\nu,l}$  pour  $l > 1$ .

Nous avons besoin pour cela de pouvoir identifier une éventuelle monotonie des fonctions qui vont apparaître dans l'équation différentielle finale. A chaque étape, la complexité des fonctions qui interviennent augmente. Nous n'essayerons donc pas d'avoir une description exacte de ces fonctions mais uniquement de décrire leurs comportements asymptotiques. Nous posons pour cela :

$$\begin{cases} g_0(x) = x^{1/2-\alpha}, \\ h_0(x) = x^{-\alpha-3/2} (x^2 + \alpha^2 - \nu^2) \text{ et} \\ f_0(x) = 1 - (\nu^2 - 1/4) x^{-2}. \end{cases}$$

Nous observons que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} g_0(x) = x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x), \\ h_0(x) = x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x) \text{ et} \\ f_0(x) = 1 + \beta_0/x^2 + x^{-2}\varepsilon(x) \text{ où } \beta_0 \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (7.2)$$

où les fonctions  $\varepsilon$  sont trois fonctions distinctes, mais non indicées différemment pour plus de clarté, de type  $1/x$ .

**Remarque 45** Dans toute la démonstration, la notation  $\varepsilon(x)$  sera utilisée pour des fonctions de type  $1/x$  qui ne sont pas nécessairement égales. Nous ne préciserons pas non plus les bornes des intervalles sur lesquels nous travaillons; étant entendu que nos relations sont vérifiées sur un voisinage de l'infini (dont la taille peut varier avec  $l$ ).

On définit alors par récurrence trois suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les relations :

$$\begin{cases} g_{n+1} = |g_n^3/h_n|^{1/2}, \\ h_{n+1}(x) = g_{n+1}'' + f_{n+1}g_{n+1}, \\ f_{n+1}(x) = f_n + 3(g_n''/g_n) - 2(g_n'/g_n)(h_n'/h_n) - (g_{n+1}''/g_{n+1}). \end{cases}$$



Nous allons prouver par récurrence que les comportements asymptotiques (7.2) se propagent par récurrence; en effet, montrons que si  $f_n, g_n$  et  $h_n$  vérifient des relations du type (7.2), les fonctions  $f_{n+1}, g_{n+1}$  et  $h_{n+1}$  aussi:

-Montrons  $g_{n+1} = x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x)$  :

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= |g_n^3/h_n|^{1/2} \\ &= x^{1/2-\alpha} \left[ (1 + \varepsilon(x))^{3/2} / (1 + \varepsilon(x))^{1/2} \right] \end{aligned}$$

on vérifie alors sans peine que ce dernier facteur peut s'écrire  $1 + \varepsilon(x)$  où  $\varepsilon(x)$  est de type  $1/x$  dans un voisinage de l'infini.

-Etude de la fonction  $f_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= 1 + \beta_n/x^2 + x^{-2}\varepsilon(x) \\ &\quad + 3x^{-3/2-\alpha}[(1/2 - \alpha)(-1/2 - \alpha) + \varepsilon(x)] \\ &\quad - ((1/2 - \alpha)(-1/2 - \alpha) + \varepsilon(x)) \left( x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x) \right)^{-1} \\ &\quad - 2x^{-1-2\alpha}((1/2 - \alpha) + \varepsilon(x))^2 \left( x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x) \right)^{-2} \\ &= 1 + \beta_n/x^2 + 3((1/2 - \alpha)(-1/2 - \alpha)x^{-2} + x^{-2}\varepsilon(x)) \\ &\quad - 2x^{-1}((1/2 - \alpha) + \varepsilon(x))((1/2 - \alpha)x^{-1} + x^{-1}\varepsilon(x)) \\ &\quad - x^{-2}((1/2 - \alpha)(-1/2 - \alpha) + \varepsilon(x)) \\ &= 1 + \beta_{n+1}/x^2 + x^{-2}\varepsilon(x) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \beta_n - 1 + 2\alpha \\ &= \beta_0 + n(-1 + 2\alpha). \end{aligned}$$

On a donc d'après  $\alpha, \beta_0 \leq 0$  (car  $|\nu| > 1/2$ ) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n < 0.$$

-Etude de la fonction  $h_{n+1}$  : On a :

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (1 + \beta_{n+1}/x^2 + x^{-2}\varepsilon(x)) \left( x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x) \right) \\ &\quad + (1/2 - \alpha)(-1/2 - \alpha)x^{-3/2-\alpha} + x^{-3/2-\alpha}\varepsilon(x) \\ &= x^{1/2-\alpha} + x^{1/2-\alpha}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_{n+1}, g_{n+1}$  et  $h_{n+1}$  vérifient elles aussi les comportements asymptotiques observés en 7.2.

• La fonction  $u_{\alpha,\nu,l}$  sera donc solution d'une équation différentielle du type :

$$(g_l u_{\alpha,\nu,l})'' + f_l g_l u_{\alpha,\nu,l} = 0 \text{ dans un voisinage de l'infini,}$$

où la fonction  $g_l$  ne s'annule pas dans un voisinage de l'infini. Or on a

$$f_l = 1 + \beta_l/x^2 + x^{-2}\varepsilon(x) \text{ où } \beta_l.$$

La fonction  $f_l$  est donc croissante dans un voisinage de l'infini (d'après un calcul direct de sa dérivée) et la suite formée par la différence  $(j_{\nu n}^l - j_{\nu n+1}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante d'après le théorème de Sturm.  $\square$

En posant  $\alpha = 0$  nous obtenons

**Corollaire 6** *Pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $|\nu| > 1/2$ , la fonction  $\frac{d^l}{dx^l} J_\nu(x)$  possède une suite dénombrable de zéros  $(j_{\nu n}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence  $(j_{\nu n}^l - j_{\nu n+1}^l)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite essentiellement décroissante.*

### 7.3 Monotonie uniforme

Pour pouvoir appliquer nos résultats de monotonie à des problèmes de contrôle optimal (par l'intermédiaire du théorème d'Ingham), nous avons besoin d'estimations de monotonie uniforme du type du théorème 2.4 de [51]. Il faudrait pouvoir montrer :

Pour  $\nu \geq M$  toutes les suites formées par les différences des zéros des fonctions  $u_{\alpha,\nu,l}$  sont monotones (et non pas essentiellement monotones comme nous venons de le voir). Nous allons montrer ce résultat dans le cadre de la dimension 2 (i.e  $\alpha = 0$ ) et pour  $l = 2$  (i.e pour les dérivées secondes des fonctions de Bessel).

**Proposition 23** *Il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $\nu \geq M$ , pour tout  $n \geq 2$  la suite  $(j_{\nu n}'' - j_{\nu n+1}'')_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante.*

**Démonstration** • Nous reprenons l'idée directrice utilisée pour démontrer le théorème 44. Au lieu de se limiter à une étude asymptotique, nous allons préciser les fonctions qui apparaissent dans notre procédure jusqu'à l'étape  $l = 2$ . Par un calcul direct nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = (4x^6 - 3x^4 - 12x^4\nu^2 - 10x^2\nu^2 + 12x^2\nu^4 + \nu^4 - 4\nu^6)(4x^2(x^2 - \nu^2)^2)^{-1}, \\ g_1(x) = x^{3/2}(x^2 - \nu^2)^{-1/2}, \\ h_1(x) = x^{-1/2}(x^4 - x^2 - 2x^2\nu^2 - \nu^2 + \nu^4)(x^2 - \nu^2)^{-3/2}, \\ g_2(x) = x^{5/2}(x^4 - x^2 - 2x^2\nu^2 - \nu^2 + \nu^4)^{-1/2} \text{ et} \\ f_2(x) = (4x^{10} - 20x^8\nu^2 - 15x^8 + 40x^6\nu^4 + 36x^6\nu^2 + 2x^6 - 40x^4\nu^6 - 18x^4\nu^4 \\ - 74x^4\nu^2 - 3x^4 + 20x^2\nu^8 - 12x^2\nu^6 - 18x^2\nu^4 + 10x^2\nu^2 - 4\nu^{10} + 9\nu^8 - 6\nu^6 + \nu^4) \\ (2x(x^4 - x^2 - 2x^2\nu^2 - \nu^2 + \nu^4))^{-2} \end{array} \right.$$

D'où en posant pour  $x \geq \nu + 1$

$$x = (z + (\nu + 1)^2)^{1/2},$$

on obtient à partir de l'expression de  $f_2(x)$ ,

$$\begin{aligned} q(z) f_2'(x) = & 4z^6\nu^2 + 7z^6 + 48z^5\nu^3 + 28z^5\nu^2 + 84z^5\nu + 53z^5 + 224z^4\nu^4 + 280z^4\nu^3 \\ & + 822z^4\nu^2 + 530z^4\nu + 169z^4 + 512z^3\nu^5 + 2072z^3\nu^4 + 4336z^3\nu^3 + 3440z^3\nu^2 \\ & + 1352z^3\nu + 283z^3 + 1680z^2\nu^6 + 7952z^2\nu^5 + 14032z^2\nu^4 + 12160z^2\nu^3 + 5838z^2\nu^2 \\ & + 1698z^2\nu + 260z^2 + 384z\nu^8 + 4672z\nu^7 + 15664z\nu^6 + 25024z\nu^5 + 22608z\nu^4 \\ & + 12536z\nu^3 + 4492z\nu^2 + 1040z\nu + 124z + 768\nu^9 + 4736\nu^8 + 12512\nu^7 \\ & + 18616\nu^6 + 17312\nu^5 + 10624\nu^4 + 4456\nu^3 + 1296\nu^2 + 248\nu + 24 \text{ où,} \end{aligned}$$

$$q(z) = 2(z^2 + z(4\nu + 1) + 2\nu(\nu + 1))^3(z + (\nu + 1))^{3/2}.$$

On remarque alors que pour tout  $x \geq \nu + 1$ , les fonctions  $f_2$  et  $f_2'$  sont bien définies et que l'on a

$$\forall x \geq \nu + 1, f_2'(x) > 0. \quad (7.3)$$

• Pour finir la démonstration, il reste à prouver que pour  $\nu$  assez grand,

$$j_{\nu 2}'' > \nu + 1. \quad (7.4)$$

La proposition sera alors une conséquence du théorème de monotonie de Sturm appliqué à  $f_2$  sur l'intervalle  $[\nu + 1, +\infty)$  et de l'inégalité 7.3. Ce dernier point est une conséquence des deux résultats suivants (voir respectivement [83] page 487 et [51] théorème 2.10)

$$\begin{cases} j_{\nu 2}'' > j_{\nu 1}' \quad \forall \nu \geq 1, \\ j_{\nu 1}' = \nu + a\nu^{1/3} + o(\nu^{1/3}) \text{ au voisinage de } +\infty \text{ avec } a > 0, \end{cases}$$

ce dernier étant bien sûr indépendant de  $\nu$ .  $\square$



## Annexe A

# Démonstration du théorème de Faber et Krahn

Nous présentons dans cette Annexe une démonstration du théorème de Faber et Krahn parue dans [35]. Le principal outil de cette démonstration est la symétrisation de Schwarz que nous introduisons par un procédé de densité.

**Définition 9** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des Boréliens deux à deux disjoints de  $\mathbb{R}^N$  de mesure finie. Soient  $0 < a_n < \dots < a_1$  des réels. On définit la **symétrisée de Schwarz** de la fonction étagée  $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  par :

$$f^* = \sum_{i=1}^n a_i 1_{[R_{i-1} \leq |x| < R_i]},$$

où les  $R_i$  sont définis par ;  $R_0 = 0$ ,  $R_i \geq R_{i-1}$  et

$$\text{mes}([R_{i-1} \leq |x| < R_i]) = \text{mes}(A_i).$$

On généralise cette définition aux fonctions de  $L^2(\mathbb{R}^N)$  par densité:

**Proposition 24** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$  une fonction positive. Il existe une unique fonction  $f^*$  de  $L^2(\mathbb{R}^N)$  telle que :

- $f^* \geq 0$ ,
- $\forall \lambda > 0$ ,  $\text{mes}([f \geq \lambda]) = \text{mes}([f^* \geq \lambda])$ ,
- Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $[f^* \geq \lambda]$  est une boule  $B(0, R_\lambda)$ .

La fonction  $f^*$  est radiale décroissante et est appelée la **symétrisée de Schwarz** de la fonction  $f$ . De plus on a pour toute fonction continue, croissante  $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que  $G(0) = 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x)) dx.$$

Le résultat suivant concerne l'invariance par symétrisation de l'espace  $H^1(\mathbb{R}^N)$  ainsi que la décroissance du gradient de ses éléments:

**Théorème 46** *Soit  $u$  une fonction positive de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Alors sa symétrisée de Schwarz  $u^*$ , appartient à  $H^1(\mathbb{R}^N)$  et on a de plus :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u^*(x)|^2 dx.$$

$$\text{et } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

**Remarque 47** *La difficulté de ce théorème réside dans l'inégalité entre les deux intégrales de Dirichlet. Celle-ci peut se démontrer dans  $\mathbb{R}^N$  à l'aide d'inégalités délicates de convolution pour lesquelles on pourra consulter [46]. Nous nous contenterons de donner une démonstration en dimension 2 plus élémentaire reposant sur l'inégalité isopérimétrique.*

#### Démonstration

- Le premier point s'obtient facilement à l'aide de la définition précédente.
- Nous démontrerons l'inégalité sur les gradients dans le cadre régulier; le cas général s'obtenant là encore par densité. Nous aurons besoin pour cela de la formule dite *co-area formula* pour laquelle nous renvoyons à [28]:

**Proposition 25** *Soit  $f$  une fonction Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^N$  de gradient presque partout non nul. Soit  $g$  une fonction mesurable de  $\mathbb{R}^N$ . On a alors la formule d'intégration curviligne suivante:*

$$\int_{\{f>t\}} g(x) dx = \int_t^{+\infty} \left( \int_{\{f=s\}} g(t) / |\nabla f(t)| d\mathcal{H}^{N-1}(t) \right) ds.$$

Nous utilisons cette relation pour calculer l'intégrale du gradient de la première fonction propre en la décomposant en une somme d'intégrales curvilignes sur ses lignes de niveau. On a pour toute fonction propre  $u$  de domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_0^T \int_0^{L(t)} \frac{\partial u}{\partial n} ds dt$$

où:

- $T$  est le maximum de l'amplitude de la fonction  $u$ ,
- le paramètre  $s$  est la longueur d'arc de la ligne de niveau  $t$  de la fonction propre  $u$ ,
- $\frac{\partial u}{\partial n}$  est la dérivée normale de  $u$  le long de cette ligne de niveau,
- $L(t)$  est la longueur de la ligne de niveau  $t$ .

On sait d'après l'inégalité isopérimétrique (pour laquelle nous renvoyons à [35]) que :

$$4\pi A(t) \leq L(t)^2.$$

où  $A(t)$  est l'aire de l'ensemble de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } u(x) \geq t\}$ . Or, on a d'après l'inégalité de Schwartz pour presque tout  $t$  :

$$L(t)^2 = \left( \int_0^{L(t)} ds \right)^2 \leq \int_0^{L(t)} \frac{\partial u}{\partial n} ds \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^{-1} ds$$

et toujours par la *co-area formula* :

$$A(t) = \int_t^T \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^{-1} ds dt.$$

d'où la différentiabilité de  $A(t)$  et,

$$A'(t) = - \int_0^{L(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^{-1} ds dt.$$

D'après ces quatre dernières relations on a :

$$-4\pi \int_0^T \frac{A(t)}{A'(t)} dt \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy.$$

Considérons à présent  $u^*$ , la symétrisée de Schwarz de la fonction  $u$ . Le même calcul donne (en tenant compte du fait que  $u^*$  est radiale et que l'égalité isopérimétrique est une égalité dans le cas d'un disque) en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^*(x, y)|^2 dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \left( (u_r^*)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta^*)^2 \right) r dr d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (u_r^*)^2 r dr d\theta = -4\pi \int_0^T \frac{A^*(t)}{A^{*'}(t)} dt. \end{aligned}$$

Il est de plus clair d'après la définition de la symétrie de Schwarz que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$A^*(t) = A(t) \text{ d'où aussi } A^{*'}(t) = A'(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^*(x, y)|^2 dx dy = -4\pi \int_0^T \frac{A(t)}{A'(t)} dt \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy.$$

qui est l'inégalité cherchée.  $\square$

Revenons à présent à la minimisation de la première valeur propre de l'opérateur de Dirichlet sous contrainte de volume; nous souhaitons démontrer ici le théorème suivant :

**Théorème 48 (Faber et Krahn)** *Parmi les ouverts de volume  $l$ , la boule réalise le minimum de la première fréquence fondamentale :*

$$\lambda_1(B) = \min_{\text{mes}(\Omega)=l} \lambda_1(\Omega).$$

**Démonstration** On peut se restreindre au cas  $\Omega$  connexe. En effet, supposons que  $\Omega$  possède au moins deux composantes connexes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On montre facilement que:

$$\lambda_1(\Omega) = \min(\lambda_1(\Omega_1), \lambda_1(\Omega_2)).$$

Supposons que  $\Omega_1$  réalise ce minimum. On peut par deux homothéties de rapports différents (de rapport  $k < 1$  pour  $\Omega_2$  et de rapport  $k' > 1$  pour  $\Omega_1$ ) transformer  $\Omega$  en un ouvert de même volume mais de première valeur propre strictement plus petite.

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $u_1$  une première fonction propre de Dirichlet associée à cet ouvert. L'ensemble de ces fonctions propres forme un espace vectoriel de dimension 1 (théorème de Krein-Rutman voir [24]) formé de fonctions régulières de signe constant. Nous choisissons  $u_1$  positive et nous la prolongeons en  $\bar{u}_1$  définie par

$$\begin{cases} \bar{u}_1(x) = u_1(x) & \text{pour } x \in \Omega \text{ et} \\ \bar{u}_1(x) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui est dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$  et positive. On peut donc définir sa symétrisée de Schwarz  $\bar{u}_1^*$ . Cette fonction est elle aussi dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$  d'après le théorème 46 et nulle en dehors de la boule  $B$  de centre 0 et de volume  $|\Omega|$ . On a de plus les inégalités suivantes:

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |u_1(x)|^2 dx} \geq \frac{\int_B |\nabla \bar{u}_1^*(x)|^2 dx}{\int_B |\bar{u}_1^*(x)|^2 dx} \geq \lambda_1(B),$$

d'où l'optimalité de la boule.  $\square$

**Remarque 49** De plus la boule est unique au sens suivant; Si  $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(B)$  alors  $\Omega$  et  $B$  diffèrent au plus d'un ensemble de capacité nulle (voir [14]).



## Annexe B

# The segment is not optimal

In order to prove proposition 1, we consider the deformation of the segment  $S_l$  described in the figure B.1. Namely, for all  $\varepsilon > 0$ , we define the polygonal line  $L_\varepsilon$  with vertices

$$(-l/2 + \delta(\varepsilon), 0), (0, \varepsilon) \text{ and } (l/2 - \delta(\varepsilon), 0), \text{ where } \delta(\varepsilon) = l/2 - \sqrt{l^2/4 - \varepsilon^2}.$$

Obviously,  $\mathcal{H}^1(L_\varepsilon) = \mathcal{H}^1(S_l)$  for all  $\varepsilon > 0$ .

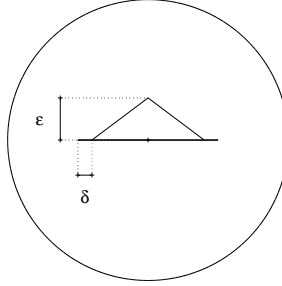


FIG. B.1: *The deformation*

We will now prove that for  $\varepsilon$  small enough,

$$\int_D \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz < \int_D \text{dist}(z, S_l) dz.$$

Unfortunately, it is clear that the function  $f : [-\eta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$f(\varepsilon) := \int_D \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz,$$

is an even function with respect to  $\varepsilon$ . So we must expect its first derivative (once it is established that  $f$  is differentiable) in  $\varepsilon = 0$  to be zero. Therefore, to prove our assumption,

we will need to compute the asymptotic expansion of  $f$  in  $0^+$  up to the order 2. We assume until the end of the proof  $D$  is the half-disc.

We consider the partition of the half-disc defined by the figure B.2.

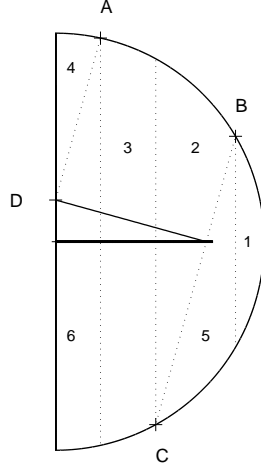


FIG. B.2: *Partition of the half-disc*

For each region  $D_i$  which of course depend of  $\varepsilon$ , we will compute the asymptotic expansion of  $\int_{D_i(\varepsilon)} \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz$  in  $\varepsilon$  as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

STEP 1. We calculate the derivatives of first order with respect to  $\varepsilon$  of the above integrals. For this purpose we first consider the following asymptotic expansion in  $\varepsilon = 0^+$  (the points  $A, B, C, D$  are defined in figure B.2):

$$\begin{aligned}
 x_A(\varepsilon) &= 2\varepsilon/l - 2\varepsilon^2/l + o(\varepsilon^2), \\
 x_B(\varepsilon) &= l/2 + 2(1 - l^2/4)^{1/2}/l\varepsilon - 3\varepsilon^2/l + o(\varepsilon^2), \\
 x_C(\varepsilon) &= l/2 - 2(1 - l^2/4)^{1/2}/l\varepsilon - 3\varepsilon^2/l + o(\varepsilon^2), \\
 y_A(\varepsilon) &= 1 - 2\varepsilon^2/l^2 + o(\varepsilon^2), \\
 y_B(\varepsilon) &= (1 - l^2/4)^{1/2} - \varepsilon + o(\varepsilon), \\
 y_C(\varepsilon) &= -(1 - l^2/4)^{1/2} - \varepsilon + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Furthermore, in each of the regions  $D_i$  it is possible to evaluate explicitly the distance

$\text{dist}(x, y)$  from the point  $(x, y)$  to the polygonal line  $L_\varepsilon$ , namely

$$d(x, y, \varepsilon) := \begin{cases} \left( (x - l/2 + \delta(\varepsilon))^2 + y^2 \right)^{1/2}, & (x, y) \in D_1 \cup D_5, \\ \left( x^2 + (y - \varepsilon)^2 \right)^{1/2}, & (x, y) \in D_4, \\ \left( \frac{(x\varepsilon + (y - \varepsilon)(l/2 - \delta(\varepsilon)))^2}{(\varepsilon^2 + (l/2 - \delta(\varepsilon))^2)} \right)^{1/2}, & (x, y) \in D_2 \cup D_3 \cup D_6. \end{cases}$$

With these notations we can compute the first derivative of the following integrals

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_1(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -2(1 - l^2/4)^{3/2}/l, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_2(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 2(1 - l^2/4)^{3/2}/l, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_3(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -2/l - 2(1 - l^2/4)^{3/2}/l, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_4(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 2/3l, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_5(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 2(1 - l^2/4)^{3/2}/l, \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_6(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 4/3l. \end{aligned}$$

Analogous calculus gives

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} d(x, y, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0+} = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_1 \cup D_5, \\ -y/\sqrt{x^2 + y^2}, & (x, y) \in D_4, \\ 2(x - l/2) \text{sign } y/l, & (x, y) \in D_2 \cup D_3 \cup D_6. \end{cases}$$

Then we have

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \int_D d(z, L_\varepsilon) dz = \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(\varepsilon)} \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz \\ &= \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(0)} d(z, 0) dz + \varepsilon \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(0)} \left. \frac{d}{d\varepsilon} d(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0+} dz + \\ &\quad \varepsilon \sum_{i=1}^6 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_i(\varepsilon)} d(z, 0) dz \right|_{\varepsilon=0+} + o(\varepsilon) \\ &= \int_D \text{dist}(z, S_l) dz + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

As expected,  $f$  is differentiable in  $0^+$  and its first derivative in this point is zero.

STEP 2. We have now to calculate the derivatives of second order. Estimates similar to those made in Step 1 give

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_1(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -10 (l^2/4 - 1) / l, \\
\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_2(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -4 (l^2/4 - 1) / l, \\
\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_3(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 2 (5l^2/4 - 3) / l, \\
\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_i(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -2/l, \quad i = 4, 6, \\
\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_5(\varepsilon)} d(x, y, 0) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 4 (l^2/4 - 1) / l.
\end{aligned}$$

and

$$\left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} d(x, y, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0+} = \begin{cases} \frac{x-l/2}{(x^2 - xl + y^2 l/2 + l^2/4)^{1/2}}, & (x, y) \in D_1 \cup D_5, \\ x^2 / (x^2 + y^2)^{3/2}, & (x, y) \in D_4, \\ -\text{sign } y / (yl^2/4), & (x, y) \in D_2 \cup D_3 \cup D_6. \end{cases}$$

It remains to compute the following terms

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_i(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} d(x, y, \varepsilon) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 5, \\
\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_4(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} d(x, y, \varepsilon) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= -1/l, \\
\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_6(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} d(x, y, \varepsilon) dx dy \right|_{\varepsilon=0+} &= 1/l.
\end{aligned}$$

Summing up, we have

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon) &= \int_D \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz = \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(\varepsilon)} \text{dist}(z, L_\varepsilon) dz \\
&= \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(0)} d(z, 0) dz + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^6 \frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_i(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} d(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0+} dz \Big|_{\varepsilon=0+} + \\
&\quad \varepsilon^2 \sum_{i=1}^6 \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \int_{D_i(\varepsilon)} d(z, 0) dz \Big|_{\varepsilon=0+} + \\
&\quad \varepsilon^2 \sum_{i=1}^6 \int_{D_i(0)} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} d(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0+} dz + o(\varepsilon^2) \\
&= \int_D \text{dist}(z, S_l) dz + \varepsilon^2 \int_{D_1(0)} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} d(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0+} dz + \\
&\quad \varepsilon^2 \int_{D_3(0)} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} d(z, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0+} dz + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

STEP 3. It remains to estimate the sign of the coefficient of  $\varepsilon^2$ . That is, we have to find the sign of the quantity

$$\begin{aligned}
\alpha_2 : &= \int_{D_1(0)} \frac{2(x - l/2)}{l(x^2 - xl + l^2/4 + y^2)^{1/2}} dy dx - \int_{D_3(0)} \frac{\text{sign } y}{yl^2/4} dy dx = \\
&\quad \int_{l/2}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2(x - l/2)}{l(x^2 - xl + l^2/4 + y^2)^{1/2}} dy dx - \\
&\quad \int_0^{l/2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\text{sign } y}{l^2/4y} dy dx.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

To conclude the proof, we will show that for  $l$  small enough the above quantity is always strictly negative. We will compute its asymptotic expansion in  $l = 0^+$ . On one hand

$$\begin{aligned}
&\frac{2(x - l/2)}{l(x^2 - xl + l^2/4 + y^2)^{1/2}} = \\
&\quad \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} l^{-1} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3}{4} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} l + o(l),
\end{aligned}$$

and again computing derivatives we have

$$\begin{aligned}
&\int_{l/2}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2(x - l/2)}{l(x^2 - xl + l^2/4 + y^2)^{1/2}} dy dx = \\
&\quad \frac{2}{l} - \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy dx + o(1).
\end{aligned}$$

And on the other hand,

$$\int_0^{l/2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\text{sign } y}{yl^2/4} dy dx = \frac{2}{3} \frac{l^2/4 - 3}{l}.$$

So we have shown that

$$\alpha_2 = - \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy dx + o(1)$$

which concludes the proof.  $\square$

## Annexe C

### More numerical results

Here we present some numerical results for optimal sets in a unit square of  $\mathbf{R}^2$  and in a unit ball in  $\mathbf{R}^3$  obtained with the use of the same evolutionary algorithms with adaptive penalty method that were employed to get optimal sets in a unit disc of  $\mathbf{R}^2$ . We see that these results confirm our expectations about the qualitative properties of optimal sets. In fact, the numerical approximations of optimal sets obtained are just unions of finite number of injective curves joined by triple points (i.e. points where three curves meet at an angle of 120 degrees), and they never touch the boundary of the ambient set. Moreover, it seems that if the length of the optimal set is sufficiently small, then this set contains no triple points.

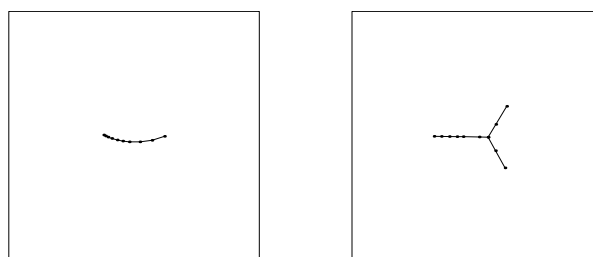


FIG. C.1: *Optimal sets of length 0.5 and 1 in a unit square*

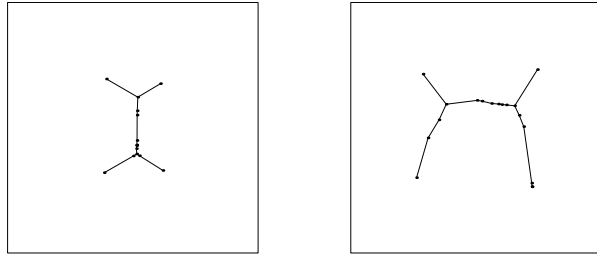


FIG. C.2: *Optimal sets of length 1.5 and 2.5 in a unit square*

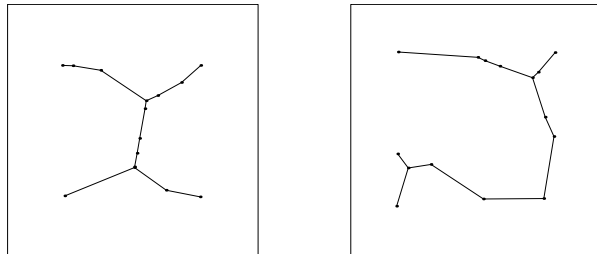


FIG. C.3: *Optimal sets of length 3 and 4 in a unit square*

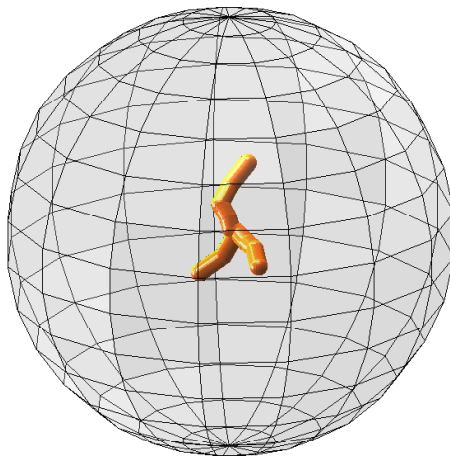


FIG. C.4: *Optimal set of length 1 in the unit ball of  $\mathbf{R}^3$*



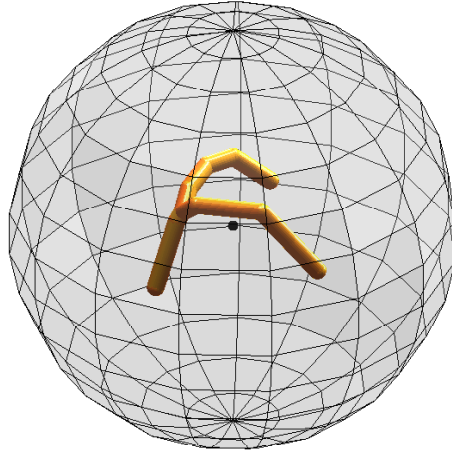


FIG. C.5: *Optimal set of length 2 in the unit ball of  $\mathbf{R}^3$*

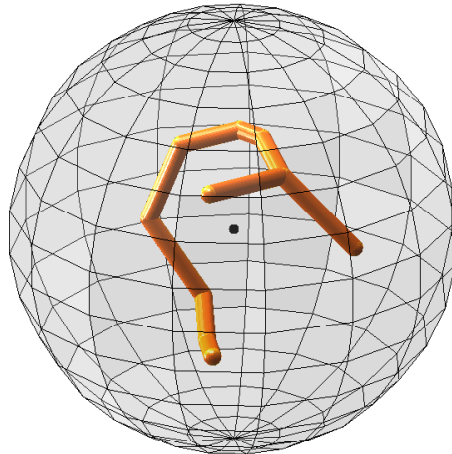


FIG. C.6: *Optimal set of length 3 in the unit ball of  $\mathbf{R}^3$*

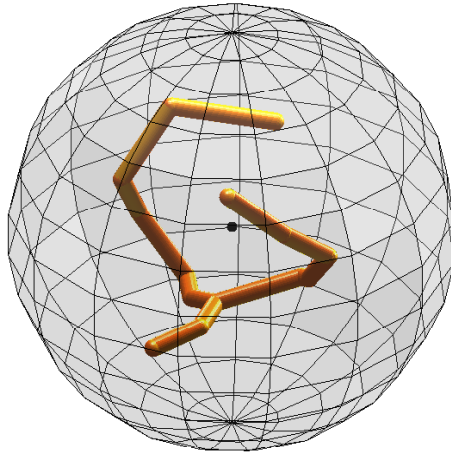


FIG. C.7: *Optimal set of length 4 in the unit ball of  $\mathbf{R}^3$*

## Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer Verlag, New York, 2001.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, A. M. Toader, *A level-set method for shape optimization*, C. R. Acad. Sci. Paris, à paraître.
- [3] G. Alessandrini, *Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), 142-154.
- [4] L. Ambrosio. Lecture notes on optimal transport problems. Preprint 32, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2000.
- [5] L. Ambrosio, P. Tilli, *Selected Topics on "Analysis in Metric Spaces"*. Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2000.
- [6] C. Baiocchi, V. Komornik et P. Loreti, *Théorèmes du type Ingham et application à la théorie du contrôle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 453-458.
- [7] C. Baiocchi, V. Komornik et P. Loreti, *Ingham type theorems and applications to control theory*, Acta Math. Hungar. **97** (2002), 41-81.
- [8] M. Bendsoe, *Optimization of structural Topology, Shape and Material*, Springer 1995.
- [9] M. Bendsoe et C. Mota Soares, *Topology optimization of structures*, Kluwer Academic Press, Dordrechts 1993.
- [10] M. W. Bern et R. L. Graham, *The shortest-network problem*, Sci. Am., **260** (1989), 84-89.
- [11] G. Bouchitte, G. Buttazzo, *Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation*. J. Eur. Math. Soc., **3** (2001), 139-168.
- [12] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [13] D. Bucur, *Regularity of optimal convex shapes*, à paraître.

- [14] D. Bucur, *Strict monotonicity of the second eigenvalue of the Laplace operator on relaxed domains*, Bull. for Appl. and Comp. Math. PAAM's periodical (1998), 113-122.
- [15] D. Bucur, G. Buttazzo et N. Varchon, *On the problem of optimal cutting*, article soumis.
- [16] G. Buttazzo, G. Dal Maso, *An Existence Result for a Class of Shape Optimization Problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **122** (1993), 183-195.
- [17] G. Buttazzo, E. Oudet, E. Stepanov, *Optimal transportation problems with free Dirichlet regions*, article soumis.
- [18] C. Cane, *Algorithmes gntiques et Optimisation topologique*, Thse de doctorat Universit de Paris VI, juillet 1996.
- [19] W. F. Chow et J. Soukup, *Set of test problem for tne minimum length connection networks*, ACM/SIGMAP Newsletter **15** (1973), 48-51.
- [20] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. I and II, Interscience Publishers, New York-London 1962.
- [21] S. J. Cox, M. Ross, *Extremal eigenvalue problems for starlike planar domains*, J. Differential Equations **120** (1995), 174-197.
- [22] M. G. Crandall et P. L. Lions, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Tran. AMS **277** (1983), 1-43.
- [23] G. Dal Maso, *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*, Birkhäuser, Boston 1993.
- [24] R. DAUTRAY AND J. L. LIONS (ed), *Analyse mathématique et calcul numérique*, Vol. I and II, Masson, Paris, 1984.
- [25] L. Davis, *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [26] do Carmo, P. Manfredo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [27] L. C. Evans, *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*. Current Developments in Mathematics, Cambridge MA (1997), 65-126, Int. Press, Boston MA (1999).
- [28] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [29] L. C. Evans, W. Gangbo, *Differential Equations Methods for the Monge-Kantorovich Mass Transfer Problem*. Mem. Amer. Math. Soc. **137**, Providence (1999).

- [30] G. Faber, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. (1923), 169-172.
- [31] F. Flandoli, *A new Approach to the L-Q-R Problem for Hyperbolic Dynamics with Boundary Control*, Lecture Notes in Control and Informations Sciences **102**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987, 89-111.
- [32] S. Finzi Vita, *Constrained shape optimization for Dirichlets problems: Discretization via relaxation*, Adv. in Math. Sci. and Appl. **9** (1999), 581-596.
- [33] L. R. Foulds et R. L. Graham, *The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete*, SIAM J. Appl. Math. **32** (1977), no.4, 826-834.
- [34] W. Gangbo, R. J. McCann, *The geometry of optimal transportation*. Acta Math., **177** (1996), 113-161.
- [35] P. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York 1964.
- [36] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, New York 1983.
- [37] P. Grisvard, *Elliptic problems in non-smooth domains*, Pitman, London, 1985.
- [38] A. Haraux, *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire*, J. Math. Pures Appl. **68** (1989), 457-465.
- [39] E. J. Haug, B. Rousselet, *Design sensitivity analysis in structural mechanics. II. Eigenvalue variations*, J. Structural Mech. **8** (1980), no. 2, 161-186.
- [40] W. K. Hayman, *Some bounds for principal frequency*, Appl. Anal. **7** (1978), 247-254.
- [41] A. Henrot, M. Pierre, *Optimisation de forme*, livre en préparation.
- [42] J. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, 1975.
- [43] F. K. Hwang et D. S. Richards, *The Steiner tree problems*, Networks **22** (1992), 55-89.
- [44] F. K. Hwang, D. S. Richards et P. Winter, *Steiner tree problem*, Ann. Discrete Math. **53**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [45] S. Jaffard, M. Tucsnak et E. Zuazua, *On a theorem of Ingham*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 577-582.
- [46] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, New York 1991.

- [47] B. Kawohl, Rearrangemnt and convexity of level sets in PDE, Lecture Notes in Mathematics **1150**, Springer-Verlag, New York 1985.
- [48] B. Kawohl, O. Pironneau, L. Tartar, J.-P. Zolesio, *Optimal Shape Design*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [49] V. Komornik, *Observability of linear distributed systems by nonharmonic analysis*, Seminari Scientifici del Dipartimento di Metodi e Modeli Matematici per le Scienze Applicate, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", (1998).
- [50] V. Komornik, *On the exact internal controllability of a Petrowsky system*, J. Math. Pures Appl. (9) **71** (1992), 331-342.
- [51] V. Komornik, *On the zeros of Bessel type functions and applications to exact controllability problems*, Asymptotic Analysis 5 (1991) 115-128.
- [52] V. Komornik, *Rapid boundary stabilization of linear distributed systems*, Equations aux dérivées partielles et applications, Articles dédiés à Jacques-Louis Lions, Gauthier-Villars, Paris, 1998, 611-622.
- [53] V. Komornik, *Rapid boundary stabilization of Maxwell's equations*, SIAM J. Control Optim. (5) **35** (1997), 1591-1613.
- [54] V. Komornik et P. Loreti, *Ingham type theorems for vector-valued functions and observability of coupled linear systems*, SIAM J. Control Optim., **37** (1998), 461-485.
- [55] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. **94** (1925), 97-100.
- [56] E. Krahn, *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen*, Acta Comm. Univ. Dorpat. **A9** (1926), 1-44.
- [57] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier, *An example of non-convex minimization and an application to Newton's problem of the body of least resistance*, to appear.
- [58] S. Lang, Complex Analysis, Springer-Verlag, New York 1995.
- [59] C. S. Lin, *On the second eigenfunctions of the Laplacian in  $\mathbb{R}^2$* , Commun. Math. Phys. **111**, 161-166.
- [60] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués*, Vol. 1, Masson, Paris, 1988.
- [61] A. D. Melas, *On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in  $\mathbb{R}^2$* ; J. Differential geometry **35** (1992), 255-263.
- [62] F. Morgan, R. Bolton, *Hexagonal economic regions solve the location problem*. Amer. Math. Monthly, 109:2 (2001), 165-172.

- 
- [63] J. Osher et S. Santosa, *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: frequencies of a two-density inhomogeneous drum*, J. Com. Phys **171** (2001), 272-288.
- [64] J. Osher et J. Sethian, *Front propagation with curvature-dependant speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79** (1988), 12-49.
- [65] R. Osserman, *Bonnesen-style Isoperimetric Inequalities*, Am. Math. Mon. **86** (1979), 1-29.
- [66] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [67] M. Pierre et J. M. Roche, *Numerical simulation of tridimensional electromagnetic shaping of liquid metals*, Numer. Math. **65** (1993), 203-217.
- [68] G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Ann. Math. Stud. **27** (1952).
- [69] M. B. Porter, *On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions*, Amer. J. Math. **20** (1988) 193-214.
- [70] P. Pucci, J. Serrin, *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J., **35** (1986), no. 4, 595-623.
- [71] S. T. Rachev, L. Rüschendorf, *Mass transportation problems. Vol. I Theory, Vol. II Applications*. Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [72] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1988.
- [73] B. Rousselet, *Shape design sensitivity of a membrane* J. Optim. Theory Appl. **40** (1983), no. 4, 595-623.
- [74] C. L. Shen, *Remarks on the second eigenvalue of a symmetric simply connected plane region*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988).
- [75] M. Schoenauer, H. Amda, *Adaptive techniques for Evolutionary Topological Optimum Design*. In preparation.
- [76] M. Scholander, *On certain minimum problems in theory of convex curves*, Trans. AMS **73** (1952), 139-173.
- [77] H.-P. Schwefel, *Evolution and Optimum Seeking*, John Wiley, Chichester, UK, 1995.
- [78] J. A. Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, 1999.

- 
- [79] J. Simon, *Differentiation with respect to the domain in boundary value problems*, Num. Funct. Anal. Optimz., **2** (1980), 649-687.
  - [80] J. Sokolowski, J. P. Zolesio, *Introduction to shape optimization: shape sensity analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 10, Springer, Berlin 1992.
  - [81] B. A. Troesch, *Elliptical membranes with smallest second eigenvalue*, Math. Comp. 27 (1973), 767-772.
  - [82] M. Vose, G. Lieping, *Punctuated equilibra in genetic search*, Complex Systems **5** (1991), 31-44.
  - [83] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London, 1958.
  - [84] S. A. Wolf et J. B. Keller, *Range of the first two eigenvalues of the laplacian*, Proc. Royal Soc. London, **447A** (1994), 397-412.
  - [85] A. A. Zhigljavski, *Theory of global random search*, Kluwer Academic, 1991.